CIRANO
Centre interuniversitaire de recherche
en analyse des organisations

Choix social et comités de sélection : le cas du patinage artistique*

MICHEL TRUCHON

Professeur titulaire, Université Laval
CIRANO, CIRPÉE

(Novembre 2002)

*J'ai une gratitude énorme envers John Galbraith et Bryan Campbell, qui m'ont fourni les données des 24 compétitions olympiques qu'ils ont patiemment collectées et préparées. Je remercie également Philippe De Donder, Stephen Gordon, Jacques Robert, Mohamed Drissi-Bakhkhat et tout particulièrement Marcel Boyer pour leurs commentaires précieux sur des versions antérieures de cet article.

2002RB-02

Les Rapports Bourgogne

Documents de synthèse portant sur des questions d'intérêt général produits par des Fellows CIRANO, les Rapports bourgogne contribuent à alimenter la réflexion et le débat public sur des questions d'actualité. Les idées et les opinions émises dans ces rapports sont sous l'unique responsabilité des auteurs, et ne représentent pas nécessairement les positions du CIRANO ou de ses partenaires corporatifs, universitaires et gouvernementaux.

The Burgundy Reports

The Burgundy Reports are written by CIRANO Fellows on issues of general interest, and aim at encouraging discussion and debate. The observations and viewpoints expressed are the sole responsibility of the authors; they do not necessarily represent positions of CIRANO or its corporative, university or governmental partners.

CIRANO

Le CIRANO est un organisme sans but lucratif constitué en vertu de la Loi des compagnies du Québec. Le financement de son infrastructure et de ses activités de recherche provient des cotisations de ses organisations-membres, d'une subvention d'infrastructure du ministère de la Recherche, de la Science et de la Technologie, de même que des subventions et mandats obtenus par ses équipes de recherche.

CIRANO is a private non-profit organization incorporated under the Québec Companies Act. Its infrastructure and research activities are funded through fees paid by member organizations, an infrastructure grant from the Ministère de la Recherche, de la Science et de la Technologie, and grants and research mandates obtained by its research teams.

Les organisations-partenaires / The Partner Organizations

École des Hautes Études Commerciales
École Polytechnique de Montréal
Université Concordia
Université de Montréal
Université du Québec à Montréal
Université Laval
Université McGill
Ministère des Finances du Québec
MRST
Alcan inc.
AXA Canada
Banque du Canada
Banque Laurentienne du Canada
Banque Nationale du Canada
Banque Royale du Canada
Bell Canada
Bombardier
Bourse de Montréal
Développement des ressources humaines Canada (DRHC)
Fédération des caisses Desjardins du Québec
Hydro-Québec
Industrie Canada
Pratt & Whitney Canada Inc.
Raymond Chabot Grant Thornton
Ville de Montréal

© 2002 Michel Truchon. Tous droits réservés. All rights reserved.
Reproduction partielle permise avec citation du document source, incluant la notice ©.
Short sections may be quoted without explicit permission, provided that full credit, including © notice, is given to the source.

ISSN 1701-9990

Résumé

Il arrive souvent qu'on doive ordonner des candidats à un poste, une bourse ou un prix sur la base des classements fournis par plusieurs juges ou experts, ou encore classer des projets d'investissement, de restructuration ou d'orientation stratégique sur la base de critères multiples ou des classements fournis par plusieurs experts ou par les membres d'un conseil d'administration. En démocratie, on cherche à agréger des préférences individuelles, exprimées dans un scrutin, en préférence collective. Dans certains sports, on fait également appel à des juges pour ordonner les compétiteurs et on doit alors agréger leurs classements individuels. Dans tous les cas, il y a un ensemble d'éléments ou d'individus à classer et des experts, des juges ou encore des critères qui fournissent autant de classements des éléments. Le problème consiste alors à attribuer un rang final à chaque élément, sur la base des classements individuels. Or, il existe une abondante littérature sur l'agrégation des préférences individuelles en préférence collective, sur les difficultés que pose ce problème et sur la manipulation stratégique des procédures de choix social.

Le but du présent rapport est d'analyser cette problématique dans le contexte du patinage artistique, qui a fait couler beaucoup d'encre récemment encore. En patinage artistique, les juges attribuent des points aux compétiteurs ; ces points servent simplement à établir un classement entre les compétiteurs pour chacun des juges. Le spectateur ordinaire ne connaît généralement pas la méthode utilisée pour arriver au classement final. Et pour cause, la règle d'agrégation utilisée par l'International Skating Union (l'ISU) est assez complexe, impliquant l'application successive de quatre critères assez différents en nature. Nous allons étudier la règle de l'ISU à la lumière de la théorie du choix social et chercher à comprendre quelles en sont les propriétés et quelle est sa susceptibilité à la manipulation stratégique. Nous allons également la comparer à d'autres règles possibles, à la fois sur le plan théorique et dans le cadre de 24 compétitions olympiques passées.

Nous chercherons finalement à tirer des enseignements de cette analyse pour les autres problèmes d'agrégation mentionnés plus haut. **En particulier, il nous semble que la règle de Kemeny est la plus appropriée dans des contextes où des juges, des experts ou les membres d'un conseil d'administration doivent donner un avis objectif sur les mérites respectifs de différents projets ou candidats à un concours.**

Table des matières

1 Introduction

Il arrive souvent que des organismes doivent ordonner des candidats à un poste, une bourse ou un prix sur la base des classements fournis par plusieurs juges ou experts. Dans beaucoup d'organisations, on doit classer des projets d'investissement, de restructuration ou encore d'orientation stratégique sur la base de critères multiples ou sur la base des classements fournis par plusieurs experts ou par les membres d'un comité exécutif ou d'un conseil d'administration. En démocratie, on cherche à agréger des préférences individuelles, exprimées dans un scrutin, en préférence collective.

Dans certains sports, comme le patinage artistique, la nage synchronisée, le plongeon et la gymnastique, on fait également appel à des juges pour ordonner les compétiteurs et on détermine ensuite un rang final sur la base des classements fournis par les juges. Pour prendre un exemple concret, dans le baseball majeur, des journalistes sportifs participent chaque année à une enquête pour déterminer le joueur le plus utile. On demande à chacun de fournir une liste des dix meilleurs joueurs, selon leur point de vue. On utilise ensuite une procédure de vote pondéré[1] pour établir un classement final des joueurs et déterminer le gagnant.

Qu'il s'agisse d'agréger des préférences individuelles ou des évaluations individuelles faites par différents experts, sur la base de critères communs et reconnus de tous, le problème est formellement le même. Il y a un ensemble d'éléments ou d'individus à classer et des experts, des juges ou encore des critères qui fournissent autant de classements des éléments. Le problème consiste alors à attribuer un rang final à chaque élément, sur la base des classements individuels.[2]

[1] Voir la sous-section 3.2 pour la définition précise de cette procédure.

[2] Il existe une abondante littérature sur l'agrégation des préférences individuelles en préférence collective, remontant certainement aussi loin qu'à Borda (1784) et Condorcet (1785), en passant par le célèbre théorème de Arrow (1951) sur les difficultés que pose ce problème et ceux de Gibbard (1973) et Satterthwaite (1975) sur la manipulation des procédures de choix social. Cette problématique a été étendue à la décision multicritères, notamment par Arrow et Raynaud (1986). D'autres auteurs, comme Jech (1983), Benoit (1992), Levin et Nalebuff (1995) se sont intéressés aux méthodes utilisées dans les sports, parfois en vue d'en tirer des enseignements pour les choix démocratiques. Mentionnons également que l'American Statistical Association a une section consacrée entièrement à la statistique dans les sports.

Le but du présent rapport est d'analyser cette problématique dans le contexte du patinage artistique, qui a fait couler beaucoup d'encre récemment encore et qui a mis à la une des journaux un problème que les spécialistes du choix social analysent depuis longtemps. En patinage artistique, les juges attribuent des points aux compétiteurs ; ces points servent simplement à établir un classement entre les compétiteurs pour chacun des juges. Le spectateur ordinaire ne connaît généralement pas la méthode utilisée pour arriver au classement final. Et pour cause, la règle d'agrégation utilisée par l'International Skating Union (l'ISU) est assez complexe, impliquant l'application successive de quatre critères assez différents en nature.

Nous allons étudier la règle de l'ISU à la lumière de la théorie du choix social et chercher à comprendre quelles en sont les propriétés et quelle est sa susceptibilité à la manipulation stratégique. Nous allons également la comparer à deux autres règles, soit celle de Borda (1784) et de Kemeny (1959), à la fois sur le plan théorique et dans le cadre de 24 compétitions olympiques passées. Nous chercherons finalement à tirer des enseignements de cette analyse pour les autres problèmes d'agrégation mentionnés plus haut.

Le plan du rapport est le suivant. Nous commençons par en donner un bref aperçu dans la section 2. Une présentation plus complète et plus formelle suit dans les autres sections. Entre autres, le problème de choix social et les règles de Borda et de l'ISU sont présentés dans la section 3. Quelques-unes des propriétés, qu'une règle d'agrégation devraient idéalement posséder, sont introduites dans la section 4. On y traite aussi de la performance de la règle de l'ISU à cet égard. L'approche du maximum de vraisemblance et la règle de Kemeny font l'objet de la section 5. La manipulation est traitée à la section 6. En conclusion, nous offrons quelques remarques supplémentaires sur la problématique et nous suggérons la règle de Kemeny pour l'agrégation des classements en patinage artistique et dans les contextes plus généraux présentés en tout début. Les définitions mathématiques sont regroupées dans une annexe. L'article du règlement de l'ISU qui nous intéresse est reproduit dans une deuxième annexe.

2 Aperçu du rapport

Nous commençons par introduire brièvement les trois règles discutées dans ce rapport, celles de Borda, de l'ISU et de Kemeny. Les applications de ces règles aux compétitions olympiques sont présentées dans la sous-section 2.4. Suivent une brève discussion des problèmes liés à la manipulation et une recommandation.

2.1 La règle de Borda

Borda (1784) a présenté sa procédure à l'Académie des sciences de France en 1770 et cette dernière l'a utilisée jusqu'à ce que Napoléon y soit élu. Elle consiste à pondérer les rangs de façon décroissante et à ordonner les alternatives selon les sommes pondérées des votes obtenus aux différents rangs.

Typiquement, s'il y a m alternatives à classer, on accorde un poids égal à $m-1$ pour un premier rang, $m-2$ pour un deuxième, etc. Si une alternative est placée au premier rang par n_1 juges, au deuxième rang par n_2 juges, etc., elle obtient un score égal à $(m-1)\,n_1 + (m-2)\,n_2 + \cdots + n_{m-1}$. Les alternatives sont ensuite classées, en ordre décroissant, selon ces scores.

Comme on verra, la règle de Borda est utilisée implicitement à l'intérieur de la règle de l'ISU, décrite ci-après. Il sera donc doublement intéressant de comparer les deux.

2.2 La règle de l'ISU et ses principes de base

Le règlement 371 de l'ISU, reproduit en annexe, décrit cette règle. Elle fait intervenir quatre critères :

1. le rang médian du compétiteur, i.e. le plus petit rang tel qu'une majorité de juges ont placé le compétiteur à ce rang ou à un meilleur rang ;
2. le nombre de juges qui ont contribué à ce rang médian ;
3. le rang moyen accordé au compétiteur par ces derniers juges ;
4. le rang moyen accordé par l'ensemble des juges ou encore le score de Borda.

Les compétiteurs sont d'abord classés selon le premier critère. Les ex aequo selon le premier critère sont ensuite départagés en utilisant le deuxième et, si nécessaire, selon le troisième et le quatrième.

Bassett et Persky (1994) étudient la règle de l'ISU, en insistant sur le fait qu'elle utilise avant tout les rangs médians pour classer les compétiteurs. C'est ce qu'ils appellent le *principe du rang médian.* Ce dernier traduit les paragraphes 1, 2 et 6 du règlement de l'ISU. Bassett et Persky montrent que le rang d'un compétiteur selon ce principe ne va jamais souffrir d'une amélioration de son classement par un ou plusieurs juges, ce qu'ils définissent comme la *monotonie*. De plus, ce classement est conforme aux vues de la majorité des juges lorsqu'une majorité d'entre eux est d'accord sur le rang exact de deux compétiteurs, ce qu'on va qualifier de *principe de la majorité pour le rang.* Bassett et Persky montrent également que le principe du rang médian est le seul à satisfaire à la fois à la monotonie, telle qu'ils la définissent, et au principe de la majorité pour le rang.

L'analyse de Bassett et Persky est confinée au principe du rang médian. Pourtant, il y a trois autres principes dans la règle de l'ISU, qui servent à départager les ex aequo selon le rang médian, l'un d'eux se résumant à la règle de Borda. Ce sont tous ces aspects de la règle de l'ISU que nous analysons plus loin, à la lumière de la théorie moderne du choix social. Nous verrons, entre autres, que cette règle viole plusieurs propriétés qu'on pourrait juger souhaitables de la part de règles d'agrégation de classements. En particulier, elle viole la condition de monotonie qu'on utilise généralement en théorie du choix social. En cela, elle n'est cependant pas pire que la plupart des fonctions d'agrégation rencontrées dans la littérature. Cela implique évidemment que la condition de monotonie de Bassett et Persky est plus faible que la condition usuelle.

2.3 L'approche de Condorcet et la règle de Kemeny

Aussi naturel que puisse paraître le principe de la majorité pour le rang, il n'en vient pas moins en contradiction avec un autre principe de majorité, préconisé par Condorcet (1785) : si, dans une comparaison deux à deux, un compétiteur obtient un meilleur rang que chacun des autres aux yeux d'une majorité absolue de juges,[3] il devrait obtenir le premier rang dans le classement final. On dit alors qu'il est le *gagnant de Condorcet*. À noter que le gagnant en question n'est pas nécessairement placé au premier rang par une majorité de juges. Autrement dit, il n'est pas nécessairement le gagnant dans une élection à la pluralité des voix.

La meilleure façon d'introduire l'approche de Condorcet est de se tourner vers une question intéressante soulevée par Bassett et Persky (1994). Une règle de classement, comme celle qu'on utilise en patinage artistique, vise-t-elle à réconcilier les vues divergentes des juges ou doit-elle fournir un classement final qui a la plus grande probabilité d'être l'ordre véritable entre les compétiteurs ? La réponse à cette question dépend de la réponse à une autre question. Les classements des juges reflètent-ils leurs préférences ou sont-ils des évaluations des mérites relatifs des compétiteurs ? Les règlements de l'ISU sont très clairs à ce sujet. Les juges sont supposés donner des points pour différents éléments d'une prestation. Ces points doivent ensuite être additionnés pour donner la note finale, celle qui est affichée pour le public.

Ces directives n'empêchent pas nécessairement le manque d'objectivité de la part des juges. Campbell et Galbraith (1996) ont effectivement trouvé de l'évidence quant à un biais national significatif mais faible dans les résultats des 24 compétitions olympiques qu'ils ont étudiées, les mêmes que nous allons examiner sous un autre angle. Gordon et Truchon (2002) ont trouvé un biais similaire pour la seule compétition qu'ils ont considérée. À ce manque d'objectivité, peut s'ajouter les comportements stratégiques, sur lesquels on reviendra.

Si on met de côté le possible manque d'objectivité et si on prend les classements des juges comme autant d'évaluations indépendantes du véritable classement entre les compétiteurs, on est amené à se poser la question : quel classement final est le plus susceptible d'être le vrai ? C'est précisément la question que s'est posée Condorcet (1785), dont l'objectif était la justification de la règle de la majorité. Il s'agissait d'une des premières applications de l'approche dite du maximum de vraisemblance et plus généralement du calcul des probabilités.

[3] Les juges qui forment la majorité peuvent être différents d'une comparaison à une autre.

Condorcet a montré que, si la relation résultant de l'application du principe de la majorité à chaque paire d'alternatives est cohérente, il s'agit alors de l'ordre le plus vraisemblable. On dit d'ailleurs que c'est l'*ordre de Condorcet*. Ce résultat repose sur l'hypothèse que la probabilité qu'un juge ordonne correctement deux alternatives est plus grande qu'une demie et qu'elle est la même pour tous les juges et toutes les paires d'alternatives.

Malheureusement, ce principe peut donner une relation cyclique : par exemple, A peut être jugé meilleur que B par une majorité absolue de juges, B peut être jugé meilleur que C par une autre majorité, qui peut à son tour être jugé meilleur que A. C'est le fameux *paradoxe de Condorcet*. Ces cycles ne sont pas simplement des possibilités théoriques. Nous avons trouvé 15 cycles dans les données de 24 compétitions olympiques, dont certains impliquaient pas moins de neuf compétiteurs. Les cycles en question se sont souvent produits au milieu du classement. Par contre, un de ces cycles impliquait des patineurs célèbres. Un des patineurs dans un autre cycle s'est retrouvé avec une médaille de bronze.

Condorcet a donné des indications sur la façon de briser les cycles mais sa prescription ne fonctionne pas lorsqu'il y a plus de trois alternatives. Young (1988) a montré qu'une application correcte de l'approche du maximum de vraisemblance conduit à un ou des ordres qui reçoivent un support maximal de la part des juges ou, ce qui est équivalent, qui présentent le plus petit nombre de désaccords possibles avec ceux des juges. Kemeny (1959) a proposé ce nombre comme distance entre deux ordres et, pour cette raison, on donne le nom de Kemeny aux ordres les plus vraisemblables et à la règle basée sur la minimisation de cette distance. S'il s'agit, non pas de chercher l'ordre le plus probable en se basant sur l'avis d'experts, mais plutôt de concilier des vues diamétralement opposées, un ordre de Kemeny peut être vu comme un meilleur compromis possible entre ces vues divergentes.

2.4 Application aux compétitions olympiques

Nous avons appliqué les règles de l'ISU, de Borda et de Kemeny aux données de 24 compétitions olympiques. Il s'agit des programmes courts et libres pour hommes, femmes et couples des années 1976, 1988, 1992 et 1994. Les classements des juges ont été construits à partir des points obtenus par les compétiteurs et les trois règles ont ensuite été utilisées pour agréger ces classements individuels en un classement final.

Le Tableau 4 donne les classements, selon les trois règles, pour le programme court des femmes de 1988. Les noms ont été changés pour A, B, C, ..., de manière à préserver l'anonymat. Pour fins de comparaison, nous présentons également le classement selon la totalité des points. Il faut cependant être prudent avant de pousser les comparaisons avec ce dernier trop loin. Les juges n'auraient peut-être pas accordé les points de la même manière s'ils avaient su qu'on allait établir le classement final directement à partir de ces derniers.[4]

L'application du principe de la majorité à chaque paire de patineuses donne un cycle sur le sous-ensemble {O, P, Q, R, S, T}. L'ordre de Kemeny unique sur ce sous-ensemble est très différent du classement selon les trois autres méthodes. Il y a également des différences impliquant d'autres compétiteurs, notamment L.

Les résultats pour toutes les compétitions sont résumés dans le Tableau 5, par une mesure des désaccords entre les classements. Cette mesure est celle de Kemeny.[5] Par exemple, dans le programme court des hommes de 1976, il y a 4.5 désaccords entre le classement final de l'ISU et celui de Kemeny, 2.5 désaccords entre le classement de l'ISU et celui de Borda, et 3 désaccords entre les classements de Borda et de Kemeny. La dernière colonne du Tableau 5 donne des informations complémentaires, notamment sur la présence de cycles et sur les principaux écarts entre les ordres de Kemeny et ceux de l'ISU. Un k-cycle est un cycle impliquant k compétiteurs.

Il y a plusieurs désaccords entre les classements selon les règles de l'ISU, de Borda et de Kemeny. Ils résultent souvent d'un conflit entre le principe du rang médian et le principe

[4] On peut se demander s'il y a des raisons valables pour n'utiliser qu'une partie de l'information fournie par les juges, soit leurs classements relatifs des compétiteurs. Une simulation effectuée par Bassett et Persky (1994) suggère que la négligence d'une partie de l'information pourrait contribuer à lisser les erreurs des juges. On pourrait aussi y voir un rôle dans la réduction des possibilités de manipulation. Ce sont là deux arguments qui auraient cependant besoin d'une meilleure justification théorique.

[5] La mesure du désaccord entre deux classements est le nombre de paires d'alternatives pour lesquelles le classement est inversé. Par exemple, il y a deux inversions entre les ordres cab et abc, une pour la paire $\{a, c\}$ et une autre pour la paire $\{b, c\}$. Si deux compétiteurs obtiennent le même rang dans un classement et des rangs différents dans l'autre, on compte cela comme une demi-inversion. La définition mathématique est donnée en annexe.

de la majorité de Condorcet (CC). Plusieurs des différences se produisent pour les rangs intermédiaires. Cependant, dans un cas, la règle de l'ISU a donné un quatrième rang alors que celle de Kemeny a donné un troisième rang. Dans deux cas, la règle de Kemeny a donné des ex aequo pour le premier rang plutôt qu'un premier et un deuxième rang. Dans un autre cas, elle a donné des ex aequo pour le deuxième rang, plutôt qu'un deuxième et un troisième rang. Finalement, dans quatre cas, elle a donné des ex aequo pour le troisième rang, plutôt qu'un troisième et un quatrième rang. Dans l'ensemble, la règle de Kemeny a également donné légèrement moins de désaccords et la règle de Borda beaucoup moins de désaccords avec les classements selon les points que celle de l'ISU.

2.5 Les possibilités de manipulation

Bassett et Persky prétendent que le principe du rang médian, à la base de la règle de l'ISU, constitue un bon renfort contre la manipulation de la procédure par une minorité de juges. Il s'agit ici de la possibilité que des juges puissent influencer l'issue du vote en ne votant pas sincèrement. C'est un problème différent du biais national dont il a été question plus haut. Si on a pu observer un tel biais, c'est qu'au moins une partie des juges ont favorisé les compétiteurs de leur propre pays plus qu'ils n'auraient sans doute dû. La manipulation stratégique peut impliquer, au contraire, qu'on déclasse un compétiteur pour qu'il obtienne un meilleur classement final. Elle peut même impliquer plus d'une compétition, comme il semble que ce fut le cas aux Olympiques de 2002.

Il y a un théorème, qu'on doit à Gibbard (1973) et à Satterthwaite (1975), à l'effet que toute procédure visant à sélectionner une alternative sur la base des préférences individuelles est manipulable, à moins qu'elle ne reflète le point de vue d'un seul juge. On dit alors que la procédure est dictatoriale. Ce théorème a été généralisé par Bossert et Storcken (1992) aux règles d'agrégation des votes individuels en un ordre final. La règle de l'ISU n'échappe pas à ces théorèmes. Nous montrons, à l'aide d'exemples, que les différents principes sur lesquels repose cette règle, incluant le principe du rang médian, sont effectivement sujets à la manipulation.

En fait, les possibilités de manipulation sont intimement liées à la violation de la monotonie, telle qu'elle est généralement définie dans la littérature sur le choix social. Or, comme on l'a mentionné plus haut, la règle de l'ISU viole cette propriété, bien qu'elle satisfasse à la condition plus faible définie par Bassett et Persky. De plus, la règle de l'ISU, et en particulier le principe du rang médian, peut, dans certaines situations, être très sensible à de petites perturbations dans les classements des juges, ce qui facilite la manipulation.

La règle de Borda affiche un bon comportement pour ce qui est des possibilités de manipulation par de petites coalitions d'individus. Les possibilités de manipuler la règle de Kemeny apparaissent également réduites. Ainsi, l'ordre final entre les candidats sérieux ne peut pas être changé en introduisant des candidats farfelus et nettement inférieurs. Il ne peut pas être changé non plus en convainquant un candidat nettement supérieur, qui se désisterait après le scrutin, de se présenter. De plus, compte tenu de l'aspect combinatoire de cette procédure, sa manipulation exige un degré de sophistication élevé de la part de ceux qui veulent s'engager sur cette voie.

2.6 Recommandations

Comme on a pu le constater dans le cas du patinage artistique, le choix d'une règle d'agrégation de classements individuels en classement final n'est pas purement théorique. Mis à part les possibilités de manipulation, ce choix peut avoir un impact réel sur les résultats finaux.

Le choix d'une règle devrait cependant se faire, non pas sur les base des résultats qu'elle peut produire dans telle ou telle circonstance, mais sur la base de ses propriétés et des possibilités de manipulation stratégique. De ce point de vue, il nous semble que la règle de Kemeny est la plus appropriée dans des contextes où des juges, des experts ou les membres d'un conseil d'administration doivent donner un avis objectif sur les mérites respectifs de différents projets ou candidats à un concours.

Cette règle consiste à chercher un ou des ordres qui sont les plus susceptibles d'être l'ordre véritable entre les alternatives. Elle respecte le principe de la majorité, préconisé par Condorcet (1785), et qui veut que, si un compétiteur est placé devant chacun des autres compétiteurs par une majorité absolue de juges, il devrait obtenir le premier rang dans le classement final. Elle respecte également une généralisation de ce principe qui veut que, si un compétiteur est classé de façon cohérente avant un autre par une majorité de juges, il doit être placé avant ce dernier dans le classement final. La cohérence réfère à l'absence de cycle impliquant les deux compétiteurs. Elle satisfait aussi à d'autres propriétés intéressantes, comme on le verra par la suite. Du point de vue de la manipulation stratégique, la règle de Kemeny est sans doute meilleure que les autres, parce que sa manipulation peut exiger un degré de sophistication élevé.

3 Le problème de choix social et les règles d'agrégation

Nous allons introduire successivement le problème de choix social, i.e. le problème d'agrégation de classements, et les règles de Borda et de l'ISU. La règle de Kemeny fait l'objet de la section 5.

3.1 Le problème de choix social

Tout problème de choix social comporte un ensemble de m *alternatives* $X = \{a, b, c, ...\}$ ou $X = \{A, B, C, ...\}$ qui peuvent être des *candidats* à des postes à pourvoir, des *projets* ou, en ce qui nous concerne, des *compétiteurs* dans une épreuve quelconque. Selon le contexte, on utilisera l'un ou l'autre de ces termes de façon interchangeable. Ces alternatives sont évaluées par un ensemble d'*électeurs* ou de *juges* ou selon un ensemble de *critères* $J = \{1, 2, ..., n\}$. Chacun d'eux fournit un *classement* des éléments de X noté r^j.[6] Ces classements

[6]Un classement r^j est un vecteur $\left(r_a^j, r_b^j, r_c^j, \ldots\right)$ dans lequel r_a^j représente le rang de a, r_b^j le rang de b, etc. Si un classement r ne comporte pas d'ex aequo, il définit alors un *ordre,* qu'on peut représenter de façon équivalente par une suite $s_1 s_2 s_3 \ldots$ où $s_1, s_2, s_3 \ldots$ sont respectivement les alternatives dont le rang est $1, 2, 3, \ldots$ dans l'ordre. Autrement, le classement est un *pré-ordre.*

peuvent représenter des préférences ou des opinions théoriquement objectives des mérites des compétiteurs. La liste des classements fournis par les n électeurs, juges ou critères sera notée $R = (r^1, \ldots, r^n)$. Elle constitue un *scrutin*.

Étant donné un scrutin R, le problème consiste à définir un classement final $CF(R)$. Dans le langage de la théorie du choix social, CF est une *règle d'agrégation* ou une *fonction de bien-être social*. Les règles de Borda, de l'ISU et de Kemeny définies dans la suite sont des exemples de fonction de bien-être social.

3.2 La règle de Borda

Commençons par définir une règle de *vote pondéré*, en attribuant des poids non croissants $w_1, \ldots, w_m$, avec $w_1 > w_m$, pour respectivement un $1^e, 2^e, \ldots,\ m^e$ rang. Chaque candidat obtient alors un score égal à $n_1 w_1 + \cdots + n_m w_m$, où $n_1, n_2, \ldots, n_m$ sont les nombres de juges qui ont placé le candidat respectivement aux rangs $1, 2, \ldots,\ m$. Les candidats sont ensuite ordonnés selon ces scores.

Parmi les règles de vote pondéré, mentionnons les suivantes :

– La *règle de Borda* accorde des poids $m-1,\ m-2, \ldots, 0$ pour respectivement un $1^e, 2^e, \ldots,\ m^e$ rang.

– La *règle de la pluralité*, utilisée dans à peu près toutes les élections en Amérique du Nord, correspond à $w_1 = 1$ et $w_2 = \cdots = w_m = 0$.

– Celle de l'*anti-pluralité* correspond à $w_1 = w_2 = \cdots = w_{m-1} = 1$ et $w_m = 0$: le poids est nul pour un dernier rang et 1 autrement.

– La méthode utilisée dans le baseball majeur, pour déterminer le joueur le plus utile, est basée sur les poids 14, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 pour respectivement les rangs 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

3.3 La règle de l'ISU

La règle de l'ISU, que nous allons maintenant définir, est une formalisation du règlement 371 de l'ISU, reproduit en annexe. Elle fait intervenir, pour chaque compétiteur s, les variables ou critères qui suivent. Les numéros des principaux paragraphes que ces critères traduisent sont indiqués entre parenthèses :

- $\rho(s)$: le rang médian, i.e. le plus petit rang tel qu'une majorité de juges ont placé le candidat s à un des rangs $1, \ldots, \rho(s)$ (par. 1-2) ;
- $J_\rho(s)$: l'ensemble des juges ayant attribué le rang $\rho(s)$ ou mieux au compétiteur s (par. 3) ;
- $n_\rho(s)$: le nombre de juges dans $J_\rho(s)$, i.e. qui ont attribué le rang $\rho(s)$ ou mieux au compétiteur s (par. 3) ;
- $B_\rho(s)$: la somme des rangs attribués à s par les juges de $J_\rho(s)$ (par. 4) ;
- $B(s)$: la somme des rangs attribués à s par tous les juges de J (par. 5)

La définition mathématique de ces variables est donnée en annexe. La règle de l'ISU fait intervenir successivement les nombres $\rho(s)\,, n_\rho(s)\,, B_\rho(s)$ et $B(s)$. Le Tableau 1 donne un exemple, tiré des règlements de l'ISU, du calcul et de l'utilisation de ces quatre nombres. Le classement des compétiteurs se fait de façon lexicographique par rapport à ces quatre nombres, de façon croissante pour le 1^e, le 3^e et le 4^e et décroissante pour le 2^e.[7] Le deuxième critère sert donc à départager les ex aequo selon le premier critère, le troisième à départager les ex aequo selon les deux premiers et le quatrième joue le même rôle pour les ex aequo selon les trois premiers critères. S'il reste des ex aequo une fois les quatre critères appliqués, les compétiteurs concernés obtiennent le même rang. La colonne du Tableau 1 portant l'entête « ISU » donne le classement final selon la règle de l'ISU. On trouve deux autres exemples dans les Tableaux 2 et 3.

On notera que $\dfrac{B(s)}{n}$ est le rang moyen obtenu par s alors que $\dfrac{B_\rho(s)}{n_\rho(s)}$ est le rang moyen accordé à s par les juges de $J_\rho(s)$. Avec la règle de Borda, on attribue au compétiteur s le poids $m-1$ pour un premier rang, $m-2$ pour un deuxième rang, etc. La somme de tous ces

[7] Si on place le tableau dans un chiffrier comme Excel, il s'agit d'ordonner les lignes selon les quatre colonnes comprenant les nombres en question.

poids sur l'ensemble des juges, i.e. le score de Borda du compétiteur s, est alors $mn - B(s)$.[8] La règle de Borda consiste donc à ordonner les candidats selon leurs rangs moyens.

On peut donc résumer ainsi les quatre critères de la règle de l'ISU : le premier est le rang médian du compétiteur, le deuxième le nombre de juges qui ont contribué à ce rang médian, le troisième est le rang moyen accordé au compétiteur par ces derniers juges alors que le quatrième est le rang moyen accordé par l'ensemble des juges ou encore le score de Borda.

On pourrait se demander pourquoi l'ISU n'utilise pas exclusivement et simplement la règle de Borda, comme on le fait, semble-t-il, dans certaines compétitions locales. Pour fin de comparaison, la colonne portant l'entête «Bor» dans les Tableaux 1 à 3 donne le classement selon la règle de Borda, i.e. selon les $B(s)$. Dans l'exemple de l'ISU, on peut noter des différences avec le classement de l'ISU pour les compétiteurs qui se partagent les rangs 9 à 13. Dans les deux autres tableaux, où les exemples sont peut-être plus artificiels, les différences sont encore plus marquées. Ainsi, dans l'Exemple 3, le deuxième compétiteur, selon la règle de Borda, arrive bon dernier selon celle de l'ISU.

4 Des propriétés pour les règles d'agrégation

4.1 Propriétés de la règle de l'ISU

On définit d'abord les deux propriétés de Bassett et Persky (1994). Les définitions mathématiques sont données en annexe.

Principe de la majorité pour le rang (PMR) : Si, dans un scrutin R, une majorité absolue de juges placent un compétiteur s exactement au rang i et une autre majorité absolue de juges placent le compétiteur t exactement au rang $k > i$, alors s doit obtenir un meilleur rang que t dans le classement final.

[8] Le score de Borda est en effet égal à :

$$(m-1)\,n_1 + (m-2)\,n_2 + \cdots + (m-m)\,n_m = n\,m - 1n_1 - 2n_2 - \cdots - m\,n_m = n\,m - B(s)$$

Monotonie selon Bassett et Persky (MBP) : Étant donné deux scrutins R et $\tilde{R}$ et deux compétiteurs s et t tels que tous les juges donnent à s un rang au moins aussi bon dans $\tilde{R}$ que dans R et à t un rang qui n'est pas meilleur dans $\tilde{R}$ que dans R, alors le classement final de s sous $\tilde{R}$ doit rester meilleur ou au moins aussi bon que celui de t, si tel était le cas sous R.

Proposition 1 (Basset et Persky) *Les seules règles à satisfaire à la fois à (PMR) et à (MBP) sont celles qui sont basées sur le principe du rang médian.*[9]

4.2 Autres propriétés

Dans la théorie du choix social, d'autres propriétés sont souvent exigées ou du moins énoncées comme souhaitables pour les règles d'agrégation des préférences. Nous les transposons à notre contexte.

Monotonie (M) : Étant donné deux scrutins R et $\tilde{R}$ et deux compétiteurs s et t tels que, en passant de R à $\tilde{R}$, tous les juges maintiennent ou améliorent le classement de s relativement à t, alors le classement final de s sous $\tilde{R}$ doit rester meilleur ou au moins aussi bon que celui de t, si tel était le cas sous R.[10]

Indépendance binaire (BI) : Le classement final d'un compétiteur s par rapport à celui d'un autre compétiteur t ne doit dépendre que du classement relatif de ces deux mêmes compétiteurs par chacun des juges, à l'exclusion des autres compétiteurs.

[9] La démonstration de cette proposition peut être trouvée dans Bassett et Persky (1994) et dans Truchon (1998).

[10] La conclusion de (M) est la même que celle de (MBP) mais la prémisse est plus faible. Un juge peut en effet maintenir ou améliorer le rang de s relativement à t en donnant un meilleur rang à s ou un moins bon rang à t. Il peut aussi le faire tout en augmentant ou en diminuant le rang des deux compétiteurs. La prémisse de (M) permet ce deuxième type de changement, ce qui n'est pas le cas de (MBP). Il en résulte donc que (M) est une condition plus forte que (MBP).

Principe de Pareto faible (PF) : Si tous les juges placent un compétiteur s avant un compétiteur t, le compétiteur s doit obtenir un meilleur rang que t dans le classement final.[11]

Absence de dictateur (ND) : La règle ne doit pas simplement refléter les vues d'un seul et même juge, quelles que soient les circonstances.

Critère de Condorcet (CC) : Si un compétiteur est classé devant chacun des autres compétiteurs par une majorité de juges dans une comparaison deux par deux, il doit être placé seul à la tête du classement final.

Proposition 2 *La règle de l'ISU satisfait aux propriétés (ND) et (PF) mais elle ne satisfait à aucune des propriétés (M), (BI) et (CC).*[12]

Le théorème de Arrow (1951) affirme qu'il n'existe aucune règle d'agrégation qui donne un classement final cohérent (transitif), tout en respectant les propriétés (BI), (PF), (M) et (ND). Ce théorème a été renforcé de biens des façons. Une version de ce théorème, due à Muller et Satterthwaite (1977), affirme qu'il n'existe aucune règle d'agrégation qui donne un classement final cohérent (transitif), tout en respectant les propriétés (PF), (M) et (ND). Comme la règle de l'ISU satisfait à (ND) et à (PF), il est inévitable qu'elle viole (M). Cela explique que Bassett et Persky ait dû s'en remettre à une propriété de monotonie plus faible. Comme (M) et (BI) ont beaucoup en commun, la violation de (BI) n'est pas une surprise. La dernière proposition montre également que le Principe de la majorité pour le rang peut venir en conflit avec le Critère de Condorcet, qui est un autre principe majoritaire.

L'Exemple 3 permet d'illustrer le comportement, pour le moins discutable, du rang médian par rapport à l'information de base. Les rangs médians de A et E sont respectivement 2 et 5 et leurs rangs selon la règle de l'ISU 1 et 6, alors que 3 juges sur 7 accordent le 6^e rang à A et que 3 juges donnent le 1^e rang à E. Rien n'y changerait si le juge 7 accordait le 2^e rang

[11] Une version plus forte de ce principe se lirait comme suit : si un juge place un compétiteur s avant un compétiteur t et que tous les autres donnent à s un rang au moins aussi bon qu'à t, alors le compétiteur s doit obtenir un meilleur rang que t dans le classement final.

[12] La démonstration de cette proposition se trouve dans l'annexe A.2.

à A. Est-ce que recevoir les rangs 2, 2, 2, 6, 6, 6, 2 est mieux que de recevoir 1, 1, 1, 5, 5, 5, 5 ? Phénomène non moins bizarre, si un seul des juges 4 à 7 changeait le 5^e rang accordé à E pour un 1^e rang, celui-ci se verrait propulsé du coup au 1^e rang, sur la seule base du rang médian. Est-ce que ce genre de discontinuité est acceptable ?

Cette grande sensibilité de la règle de l'ISU aux données est en fait due à une utilisation incomplète de l'information par le principe du rang médian. De ce point de vue, le rang moyen, à la base de la règle de Borda, se comporte beaucoup mieux mais il n'est utilisé qu'en dernier recours avec la règle de l'ISU. La règle de Kemeny, qui sera présentée plus loin, semble également utiliser beaucoup mieux l'information disponible. Ainsi, A et E obtiennent respectivement les rangs 3 et 2 selon la règle de Borda et 2 et 1 selon celle de Kemeny. Cela semble correspondre davantage aux rangs fournis par les juges. Comme autre illustration de ce comportement bizarre, dans l'Exemple de l'ISU, le juge 8 peut faire en sorte que M aura n'importe quel rang final entre 9 et 13, en lui accordant le rang qu'il veut comme rang final.

5 L'approche de Condorcet-Kemeny-Young

Condorcet (1785) s'est intéressé au classement complet de toutes les alternatives d'un ensemble et non seulement au choix d'un gagnant. Il a donc naturellement songé à étendre son critère à toutes les paires d'alternatives, en espérant ainsi obtenir un classement complet et cohérent. Condorcet cherchait à justifier le principe de la majorité. Sa recherche s'inscrit dans la justification du Contrat social de Jean-Jacques Rousseau (1762).

> L'opinion de la majorité est légitime parce qu'elle exprime la volonté générale. Quand une loi est proposée à l'assemblée du peuple, ce qu'on demande à ses membres n'est pas s'ils approuvent la proposition ou la rejettent mais si elle est conforme à la volonté générale. Les votes sont des opinions sur cette question. Si une opinion contraire à la mienne prévaut, cela prouve tout simplement que j'ai fait une erreur et que ce que je croyais être la volonté générale ne l'était pas.

Condorcet a voulu donner un contenu plus rigoureux à cette proposition, en utilisant le calcul des probabilités qui était tout nouveau à l'époque. L'hypothèse de base est qu'il y a un meilleur candidat, un deuxième meilleur, etc. Les électeurs peuvent avoir des opinions différentes parce qu'ils sont des juges imparfaits. Cependant, s'ils ont plus souvent raison que tort, alors l'opinion de la majorité est susceptible d'identifier l'ordre « véritable » entre les candidats. L'objectif de Condorcet est d'estimer cet ordre à partir des votes exprimés, i.e. de trouver l'ordre le plus probable ou l'ordre qui a la plus grande probabilité d'être vrai. C'est un problème d'inférence statistique dans lequel les votes des juges sont autant d'observations à partir desquelles on va chercher à inférer l'ordre véritable.

Condorcet a montré que, si l'application du principe de la majorité à toutes les paires de candidats ou d'alternatives donne un ordre cohérent, il s'agit effectivement de l'ordre le plus probable, sous l'hypothèse que les juges ont la même probabilité d'ordonner correctement deux candidats et que cette probabilité est la même pour toutes les paires d'alternatives.[13] On le qualifie d'*ordre de Condorcet*.

5.1 Les cycles et la règle de Kemeny

Condorcet s'est cependant rendu compte que la relation ainsi obtenue peut contenir des cycles. Ainsi, convenons de noter $A \succ B$ la relation «A défait B avec une majorité absolue des voix». Dans l'Exemple 3, on a :

$$A \succ B \succ C \succ D \succ E \succ A$$

[13] Drissi et Truchon (2002) remettent la deuxième partie de cette hypothèse en question. Ils supposent que cette probabilité augmente à mesure que la distance entre deux alternatives, dans un ordre donné, augmente. N'est-il pas plausible, en effet, que des juges aient plus de chance de s'entendre sur le classement relatif d'un bon et d'un mauvais candidats que sur le classement de candidats de forces à peu près égales ? Leurs résultats sont à l'effet que l'ordre le plus vraisemblable n'est plus nécessairement celui de Kemeny ni même celui de Condorcet lorsqu'il existe. Tout dépend de la spécification de la fonction de probabilité. Drissi (2002) va encore plus loin, en introduisant des fonctions de perte pour pondérer les erreurs, par rapport à l'ordre véritable, selon leur gravité. Il trouve cependant que les ordres optimaux, ceux qui minimisent l'espérance de la perte, ne sont pas forcément différents des ordres les plus probables.

C'est ce qu'on appelle un *cycle*. Dans l'exemple de l'ISU, on a le cycle K $\succ$ I $\succ$ M $\succ$ L $\succ$ K.[14]

Condorcet a donné des indications sur la marche à suivre en cas de cycles. Malheureusement, ses indications ne fonctionnent pas lorsqu'il y a plus de trois candidats. Young (1988) a montré que l'ordre le plus vraisemblable est celui qui possède le nombre maximal d'accords avec les classements du scrutin. De façon équivalente, c'est celui qui possède le plus petit nombre de désaccords avec le scrutin. On notera $\delta^K(r, R)$ la somme des désaccords entre un ordre r et les classements d'un scrutin R.[15]

C'est Kemeny (1959) qui a proposé le nombre de désaccords ou inversions comme distance entre deux ordres. Aussi, on donne le nom d'*ordre de Kemeny* à celui qui minimise la distance $\delta^K(r, R)$ par rapport à R. Ainsi, un ordre de Kemeny est le plus probable ou le moins conflictuel, en ce sens qu'il minimise la somme des désaccords avec les ordres de tous les juges.

Avec m compétiteurs, il y a $m!$ ordres possibles. Pour trouver un ordre de Kemeny, il faudrait en principe calculer les distances $\delta^K(r, R)$ par rapport à R pour chacun de ces $m!$ ordres. Comme il y a 24 compétiteurs dans certaines compétitions olympiques, c'est tout à fait impossible.[16] Heureusement, la tâche peut être décomposée en utilisant une généralisation du critère de Condorcet.

Critère de Condorcet généralisé (CCG) : Si un compétiteur est classé de façon cohérente avant un autre par une majorité de juges, il doit être placé avant ce dernier dans le classement final. La *cohérence* réfère à l'absence de cycle impliquant les deux compétiteurs.

À noter que, si tous les compétiteurs peuvent être ordonnés selon ce critère, on obtient l'ordre de Condorcet, qui est alors l'ordre unique de Kemeny. Autrement, cela signifie qu'il y a un ou plusieurs cycles. Il s'agit alors de trouver les ordres de Kemeny sur chacun des

[14] Cette possibilité de cycle n'est pas étrangère au fait que l'approche de Condorcet respecte (BI).

[15] Voir la note au bas de la p. 7 sur la distance entre deux ordres, de même que l'annexe A.3.

[16] 24! est un nombre de 24 chiffres. Un ordinateur de génération courante peut effectuer l'addition $1+1$ environ un demi-million de fois en une seconde. Il lui faudrait 40 milliards d'années pour effectuer cette simple opération 24! fois.

sous-ensembles de compétiteurs pour lesquels il y a un cycle, pour compléter les classements des alternatives obtenus de façon non ambiguë par l'application de (CCG).[17]

La colonne chapeautée du titre «CCG» des Tableaux 1 à 3 donne les rangs des compétiteurs selon ce critère. Ceux qui ne peuvent être classés selon ce critère sont marqués d'un « ? ». Dans l'exemple de l'ISU, les seuls compétiteurs qui ne peuvent être complètement classés sont I, K, L et M. Par contre, selon (CCG), ils doivent tous occuper un rang compris entre 10 et 13 parce qu'ils sont meilleurs que N et O et moins bons que tous les autres selon une majorité de juges. Dans l'Exemple 2, on a en fait un ordre de Condorcet. Dans l'Exemple 3, comme il y a un cycle impliquant toutes les alternatives, le critère ne s'applique pas.

D'autres résultats contribuent également à faciliter la recherche d'un ordre de Kemeny. Ainsi, dans l'exemple de l'ISU, on peut éliminer d'emblée 19 des 24 ordres, parce que, dans ces derniers, un candidat en précède immédiatement un autre alors qu'une majorité de juges seraient favorable à leur inversion, laquelle diminuerait la distance de Kemeny. Les 5 ordres restant apparaissent dans le tableau qui suit avec, pour chacun, la distance de Kemeny par rapport aux classements des 9 juges :

Ordre	$\delta(r, R)$
KIML	24
IMLK	25
ILKM	25
LKIM	27
MLKI	28

L'unique ordre de Kemeny est donc KIML, ce qui permet de compléter le classement partiel déjà obtenu avec (CCG). Le classement ou ordre de Kemeny apparaît dans la dernière colonne du tableau. On notera que le classement des compétiteurs I à M est très différent du classement selon la règle de l'ISU. Dans l'Exemple 3, le contraste entre les deux classements est encore plus frappant. On a vu pourquoi à la fin de la section 4.

[17] On trouvera les fondements de cette décomposition dans Truchon (1998).

Il peut y avoir plus d'un ordre de Kemeny ; c'est le reflet de la présence d'un cycle, qui résulte lui-même du désaccord entre les juges. Toutes les règles tranchent d'une façon ou d'une autre entre ces désaccords. La règle de Kemeny fait de même mais peut donner plusieurs ordres ex aequo. Dans Truchon (1998), nous avons développé le concept d'*ordre de Kemeny moyen* pour faire face à cette situation. Il s'agit du classement basé sur la moyenne des rangs obtenus dans tous les ordres de Kemeny. On dit que c'est l'ordre de Kemeny moyen, s'il ne comporte aucune inversion par rapport aux ordres de Kemeny. Il peut cependant comporter des ex aequo.[18] Dans le cas contraire, il n'y a pas d'ordre de Kemeny moyen et on doit composer avec les ordres multiples.

Dans les applications aux données du patinage artistique, rapportées dans le Tableau 5, nous avons, dans les cas d'ordres de Kemeny multiples, retenu l'ordre de Kemeny moyen, lorsqu'il existait. Dans le cas contraire,[19] l'ordre de Kemeny le plus près du classement de l'ISU a été retenu, de manière à minimiser les désaccords entre les deux. Tous les ex aequo dont il est question dans les remarques du Tableau 5 sont ceux des ordres de Kemeny moyens.

5.2 Les propriétés de la règle de Kemeny

Bien que la procédure du vote binaire de Condorcet respecte les propriétés (BI) et (M), ce n'est pas le cas de la règle de Kemeny. Dans l'Exemple 3, si les compétiteurs A et B se désistaient ou, de façon équivalente, si tous les juges les plaçaient aux deux dernier rangs, alors l'ordre pour les autres compétiteurs deviendrait CDFE. Ainsi, E se retrouverait le dernier des quatre alors qu'il est le gagnant sous le scrutin original. Selon le théorème d'impossibilité de Arrow, il fallait s'y attendre puisque cette procédure ordonne les candidats de façon cohérente.

Par contre, la règle de Kemeny satisfait à une propriété d'indépendance plus faible. Young (1995) définit ainsi cette propriété, qu'il appelle l'*indépendance locale par rapport aux candidats non pertinents* (IL) : le classement des candidats dans chaque *intervalle d'un ordre*

[18] La définition précise de ce concept est donnée en annexe.
[19] Cela ne s'est produit que lorsqu'il y avait exactement deux ordres de Kemeny.

devrait demeurer inchangé si on néglige les candidats en dehors de l'intervalle. Un intervalle est défini comme un sous-ensemble de candidats qui se succèdent dans un ordre donné. Ainsi, $abcd, bcd, bc, cd$ et cde sont des intervalles de l'ordre $abcde$.

La règle de Kemeny satisfait à d'autres propriétés, notamment le principe de Pareto faible (PF), l'*anonymat* (tous les électeurs ou juges sont traités sur le même pied), la *neutralité* (tous les candidats sont traités sur le même pied) et la *robustesse par rapport au découpage électoral* (si l'utilisation d'une même procédure par deux groupes différents d'électeurs donne le même classement final, l'utilisation de cette même procédure par un corps constitué des deux groupes doit conduire au même classement).

La règle de Borda satisfait également à ces dernières propriétés mais elle ne satisfait pas à (IL)[20], pas plus que celle de l'ISU. Dans l'Exemple 2, l'ordre de Borda est ACBDE. L'élimination de B changerait le classement de l'intervalle AC pour CA. Dans le même exemple, l'ordre ISU est BACDE. L'élimination de D changerait le classement de l'intervalle BAC pour ABC. En fait, Young et Levenglick (1978) montrent que la règle de Kemeny est seule à satisfaire à ces quatre dernières propriétés en même temps qu'à (IL).

De son côté, la règle de Borda satisfait à une autre forme de *robustesse au découpage électoral* : si l'utilisation d'une même procédure par deux groupes différents d'électeurs donne le même gagnant, l'utilisation de cette même procédure par un corps constitué des deux groupes doit conduire au même gagnant. Ce type de robustesse n'est ni plus fort ni plus faible que le précédent. La règle de Borda favorise également la *participation* : si un juge ou un électeur additionnel peut réussir à faire changer le gagnant, cela ne peut être que dans le sens qu'il favorise. Comme le montrent Young (1974) et Moulin (1988), les règles qui respectent le critère de Condorcet, comme la règle de Kemeny, ne respectent pas ces deux propriétés. Toutefois, la participation n'est pas une préoccupation importante dans un contexte, comme le patinage artistique, où les juges n'ont pas le choix de ne pas exprimer leur avis.

[20] C'est vrai de façon plus générale de toutes les procédures de *vote pondéré* définies dans la sous-section 3.2.

6 La manipulation

Bassett et Persky (1994) prétendent que le principe du rang médian constitue un bon renfort contre la manipulation de la procédure par une minorité de juges. La manipulation concerne l'intérêt qu'il peut y avoir à ne pas voter sincèrement et même à ne pas voter du tout, afin que le choix final soit davantage conforme à ses préférences. Pourtant, on sait que toute procédure non dictatoriale se prête à la manipulation. C'est là un résultat très général, qui a été démontré par Gibbard (1973) et Satterthwaite (1975) dans le cas des procédures qui sélectionnent un gagnant ou un ensemble de gagnants, et qu'on appelle des *fonctions de choix social*. Ce résultat a été généralisé par Bossert et Storcken (1992) aux procédures qui ordonnent tous les candidats, comme la règle de l'ISU ou celle de Kemeny.

Comme les règles de l'ISU, de Kemeny et de Borda ne sont pas dictatoriales, elles n'échappent pas à ces théorèmes. Elles peuvent donc se prêter à la manipulation pour certaines configurations de préférences. Le fait qu'elles violent la propriété d'indépendance binaire de Arrow (BI) n'y est pas étranger. Il y a d'ailleurs un lien étroit entre ces théorèmes d'impossibilité et celui de Arrow (1951).[21]

Il y a plusieurs aspects à la manipulation. Certaines procédures sont plus faciles à manipuler que d'autres, parce que leur manipulation exige moins de sophistication. Dans certains cas, la manipulation par de petits groupes d'électeurs peut être possible ; dans d'autres, elle peut exiger de grandes coalitions. Certaines procédures sont plus susceptibles d'être manipulées que d'autres parce qu'il existe davantage de configurations de préférences pour lesquelles la manipulation peut amener des changements dans le sens souhaité. Et l'impact de la manipulation peut être plus ou moins grand. Enfin, comme on l'a vu aux Jeux Olympiques de 2002, la sophistication peut même impliquer les résultats de plusieurs compétitions. Nous

[21] Les théorèmes, auxquels on vient de référer, affirment que, si une procédure n'est pas manipulable, elle doit refléter les vues d'un dictateur. Un autre résultat de même nature, établi par Muller et Satterthwaite (1977), affirme que les seules fonctions de choix social qui ne sont pas manipulables sont celles qui satisfont à (M), une propriété qui est violée par les règles de l'ISU, de Kemeny et de Borda. Comme, on peut l'imaginer, il y a un lien étroit entre l'existence d'un dictateur et la condition (M).

allons analyser en détail les possibilités de manipulation des trois règles discutées dans ce rapport, en limitant toutefois l'analyse aux résultats d'une même compétition.

6.1 La règle de Borda

L'exemple de l'ISU offre une belle illustration des possibilités de manipulation de la règle de Borda. Le juge 9 pourrait améliorer le classement final de C, son compétiteur favori, en permutant les rangs accordés à B et à E. Il augmenterait ainsi $B(\mathrm{B})$, le rang moyen de B, de 2, ce qui ferait glisser B après C. Le mathématicien Laplace (1812) avait très bien souligné les problèmes inhérents à la règle de Borda.

> Ce mode d'élection serait sans doute le meilleur, si des considérations étrangères au mérite n'influaient point souvent sur le choix des électeurs, même les plus honnêtes, et ne les déterminaient point à placer aux derniers rangs les candidats les plus redoutables à celui qu'ils préfèrent, ce qui donne un grand avantage aux candidats d'un mérite médiocre. Aussi l'expérience l'a-t-elle fait abandonner aux établissements qui l'avaient adopté.

La réponse de Borda est bien connue : « Mon scrutin n'est fait que pour d'honnêtes gens. »

Quelles sont les possibilités de manipulation de la règle de Borda ? Saari (1990) a montré que, au moins dans le cas de trois alternatives, elle est celle qui, parmi les règles de vote pondéré, offre les plus grandes possibilités de manipulation en termes d'impact stratégique. Toutefois, l'impact de la manipulation n'est qu'une des facettes du problème. Pour avoir un impact, encore faut-il que la manipulation puisse réussir. La seconde question concerne donc les possibilités de manipulation. Quelle est la fraction des configurations de préférences pour lesquelles la manipulation est possible ? Le résultat le plus surprenant de Saari est sans doute que, parmi les règles de vote pondéré, celle de Borda n'est pas loin d'être celle pour laquelle il y a le moins de configurations de préférences pour lesquelles elle peut être manipulée avec succès par un petit groupe d'électeurs (cinq ou moins). Une des pires règles de ce point de vue est celle de la pluralité.

6.2 La règle de l'ISU

La règle de l'ISU peut être manipulée via ses différents critères. Ainsi, dans l'exemple de l'ISU, le classement entre B et C étant déterminé par leur rang moyen, le juge 9 pourrait, comme avec la règle de Borda, améliorer le classement final de C en permutant les rangs accordés à B et à E. Le principe du rang médian est lui-même susceptible d'être manipulé. Dans l'Exemple 2, si le juge 5 permutait les rangs accordés à A et C, il permettrait à A de passer avant B dans le classement final, ce qui refléterait davantage le classement initial de ce juge. Comme on l'a vu à la fin de la section 4, le rang médian peut se comporter de façon bizarre, ce qui peut sans doute faciliter la manipulation dans certains cas.

Pour ce qui est des possibilités de manipulation, on peut montrer que la règle de l'ISU s'apparente à une élection à plusieurs tours. Au premier tour, les compétiteurs qui obtiennent une majorité pour le premier rang se voient attribuer ce rang. Au tour suivant, les compétiteurs restants qui obtiennent une majorité pour le premier ou le deuxième rang se voient attribuer le deuxième rang et ainsi de suite. Formellement, au tour k, on utilise une règle de vote pondérée avec les poids $w_1 = \cdots = w_k = 1$ et $w_{k+1} = \cdots = w_m = 0$. C'est ce qu'on appelle une règle de *vote par assentiment*.[22] Selon les résultats de Saari, le vote par assentiment fait moins bien que la règle de Borda pour ce qui est des possibilités de manipulation. Le premier tour et le dernier tour de ce processus itératif consiste à utiliser respectivement les règles de la pluralité et de l'anti-pluralité, qui sont les pires de ce point de vue.

La règle de l'ISU reposant sur une combinaison de procédures susceptibles d'être manipulées, la question qu'on peut maintenant se poser est : cette règle est-elle plus ou moins susceptible d'être manipulée que ses constituantes ? Il n'y a pas de réponse claire à cette question. D'un côté, le fait que la manipulation d'une procédure de vote pondérée puisse impliquer le recours à une autre de ces procédures, avec des poids différents, peut réduire les occasions de manipuler la première. D'un autre côté, ce fait peut lui-même ouvrir des

[22] Cette règle est utilisée par plusieurs sociétés scientifiques pour l'élection de leurs officiers. Les membres sont invités à cocher un certain nombre de noms proposés et celui ou ceux, selon le cas, qui obtiennent le plus grand nombre de votes sont élus.

possibilités nouvelles aux manipulateurs. Est-ce que ces possibilités additionnelles peuvent compenser pour celles qui sont perdues à cause de la nécessité de recourir à une autre procédure ? La réponse dépend probablement des circonstances. Toutefois, dans la mesure où le critère de Borda n'est utilisé qu'en dernier recours dans la règle de l'ISU, on peut sans doute affirmer, sans grand risque de se tromper, que la performance de la règle de l'ISU peut difficilement être meilleure que celle de Borda, quant aux possibilités de manipulation.

À la suite du scandale qui a entouré les derniers Jeux Olympiques, l'ISU a proposé qu'il y ait dorénavant un plus grand nombre de juges et que les points d'une partie seulement d'entre eux soient retenues, le choix étant fait au hasard par un ordinateur.[23] Cette modification rendrait la manipulation plus difficile et en réduirait le gain attendu. Pour commencer, un juge ne saurait pas avec certitude quels sont les autres juges dont les classements seraient retenus, ce qui rendrait le choix d'un classement, pour obtenir un résultat donné, beaucoup plus difficile. De plus, même s'il pouvait y arriver, il n'est pas certain que son propre classement serait retenu, ce qui diminuerait le rendement attendu d'un comportement stratégique. Finalement, le rendement d'une action concertée de plusieurs juges serait encore plus faible dans la mesure où la probabilité que les classements fournis par tous ces juges soient retenus diminuerait avec le nombre de juges impliqués. Ce changement ne diminuerait cependant pas la tendance facilement observable des juges à favoriser de façon systématique les compétiteurs de leur pays, du moins les bons.

6.3 La règle de Kemeny

Dans la mesure où elle satisfait à la propriété d'indépendance locale (IL), les possibilités de manipuler la règle de Kemeny s'en trouvent réduites. Ainsi, l'ordre final entre les candidats sérieux ne peut pas être changé en introduisant des candidats farfelus et nettement inférieurs.

[23] Le quotidien *Le Soleil* annonçait, dans son édition du 31 octobre 2002, que ce système serait utilisé pour la première fois dans la compétition de *Patinage Canada* qui débutait la journée même à Québec. On peut trouver les détails de cette proposition à l'adresse : www.isu.org.

Il ne peut pas être changé non plus en convainquant un candidat nettement supérieur, qui se désisterait après le scrutin, de se présenter.

De plus, compte tenu de l'aspect combinatoire de cette procédure, sa manipulation exige un degré de sophistication élevé de la part de ceux qui veulent s'engager sur cette voie. Ils doivent, avant tout, s'assurer qu'il y ait un cycle pour y arriver. En effet, si les compétiteurs peuvent être classés de façon cohérente par l'application du seul critère de Condorcet généralisé, et ce peu importe la façon de voter, on est alors confiné à la procédure binaire et la stratégie optimale est de voter sincèrement. La meilleure façon de voter dans chacun des scrutins, où il n'y a que deux candidats, est en effet de voter pour son candidat préféré. Cette affirmation ne va pas à l'encontre des théorèmes de Gibbard-Satterthwaite et de Bossert-Storcken, parce que cette procédure binaire ne donne pas toujours des résultats cohérents.

Donc, à moins que le vote sincère ne donne déjà un cycle, un groupe de manipulateurs doit trouver une stratégie qui produira d'abord un cycle. Cette stratégie doit également être choisie de manière à donner un classement qu'ils vont préférer à celui qui serait obtenu sans leur comportement stratégique. En supposant que de telles stratégies puissent exister, les trouver n'est certainement pas une mince affaire. Qui plus est, une tentative de manipulation peut bien se retourner contre ses auteurs, entre autres s'ils n'arrivent pas à produire un cycle.[24]

7 Conclusion

Comme on a pu le constater, le choix d'une règle d'agrégation de classements individuels en classement final n'est pas purement théorique. Mis à part les possibilités de manipulation, ce choix peut avoir un impact réel sur les résultats finaux. Plusieurs désaccords ont été mis évidence entre les classements selon les règles de l'ISU, de Borda et de Kemeny et les

[24]Nous n'avons pas réussi à trouver de possibilités de manipulation profitable de la règle de Kemeny dans les exemples de ce rapport. Cela ne veut pas dire qu'il n'y en a pas et qu'il ne soit pas possible de trouver d'autres exemples où la manipulation serait profitable.

classements selon les points dans 24 compétitions olympiques. Plusieurs de ces différences ont été rencontrées pour les rangs intermédiaires mais ces rangs peuvent être importants aux yeux des compétiteurs, puisque la participation à des compétitions à venir dépend souvent des performances antérieures.

En patinage artistique, une solution de rechange à la règle de l'ISU pourrait être celle de Borda, qui est en fait utilisée à l'intérieur de celle de l'ISU pour départager les compétiteurs qui n'ont pu l'être selon les trois autres critères. La règle de Borda est parfois utilisée, semble-t-il, dans certaines compétitions locales. Il s'agit d'une règle de vote pondéré qui a des propriétés intéressantes. Toutefois, elle viole le principe de la majorité de Condorcet et cela nous semble grave. Elle viole également la condition d'indépendance locale, qui peut assurer une protection contre une certaine forme de manipulation. Sur la base des résultats de Saari (1990), elle semble cependant moins susceptible à la manipulation par une minorité de juges que celle de l'ISU. La manipulation par de larges coalitions de juges n'est pas un problème en patinage artistique.

Comme on l'a vu dans ce rapport, la règle de Kemeny satisfait le critère de Condorcet généralisé et la condition d'indépendance locale. De plus, sa manipulation peut exiger un degré de sophistication élevé. C'est sur la base de ces résultats que **nous recommandons l'adoption de la règle de Kemeny dans des contextes où des juges, des experts ou les membres d'un conseil d'administration doivent donner un avis objectif sur les mérites respectifs de différents projets ou candidats à un concours.**

Annexes

A Définitions mathématiques

A.1 Les critères de la règle de l'ISU

Étant donné un scrutin R, on définit les ensembles et variables qui suivent :
$J_i(s) = \{j \in J : r_s^j \leq i\}$, $n_i(s) = |J_i(s)|$, $\bar{n}_i(s) = |\{j \in J : r_s^j = i\}|$

$\rho(s) = \min\limits_{i \in \{1,\ldots,m\}} i$ tel que $n_i(s) > \frac{J}{2}$

$J_\rho(s) = J_{\rho(s)}(s)$ et $n_\rho(s) = n_{\rho(s)}(s)$ (pour simplifier la notation)

$B_\rho(s) = \sum\limits_{j \in J_\rho(s)} r_s^j$

$B(s) = \sum\limits_{j \in J} r_s^j$

A.2 Les propriétés

Principe de la majorité pour le rang (PMR) : Étant donné un scrutin R, deux compétiteurs s et t et deux rangs i et k tels que $\bar{n}_i(s) > \frac{n}{2}$, $\bar{n}_k(t; R) > \frac{n}{2}$, $i < k$, alors $FR_s(R) < FR_t(R)$.

Monotonie selon Bassett et Persky (MBP) : Étant donné deux scrutins R et $\tilde{R}$ et deux compétiteurs s et t tels que $\tilde{r}_s^j \leq r_s^j$ et $\tilde{r}_t^j \geq r_t^j$ $\forall j \in J$, alors :

$$\begin{aligned} FR_s(R) &< FR_t(R) \Rightarrow FR_s\left(\tilde{R}\right) < FR_t\left(\tilde{R}\right) \quad \text{et} \\ FR_s(R) &= FR_t(R) \Rightarrow FR_s\left(\tilde{R}\right) \leq FR_t\left(\tilde{R}\right). \end{aligned}$$

Monotonie (M) : Étant donné deux scrutins R et $\tilde{R}$ et deux compétiteurs s et t tels que $r_s^j < r_t^j \Rightarrow \tilde{r}_s^j < \tilde{r}_t^j$ et $r_s^j = r_t^j \Rightarrow \tilde{r}_s^j \leq \tilde{r}_t^j$ $\forall j \in J$, alors :

$$\begin{aligned} FR_s(R) &< FR_t(R) \Rightarrow FR_s\left(\tilde{R}\right) < FR_t\left(\tilde{R}\right) \quad \text{et} \\ FR_s(R) &= FR_t(R) \Rightarrow FR_s\left(\tilde{R}\right) \leq FR_t\left(\tilde{R}\right). \end{aligned}$$

Indépendance binaire (BI) : Étant donné deux scrutins R et $\tilde{R}$ et deux compétiteurs s et t tels que

$$\forall j \in J : r_s^j \leq r_t^j \Leftrightarrow \tilde{r}_s^j \leq \tilde{r}_t^j \text{ et } r_s^j \geq r_t^j \Leftrightarrow \tilde{r}_s^j \geq \tilde{r}_t^j,$$

alors :

$$\begin{aligned} FR_s(R) &\leq FR_t(R) \Leftrightarrow FR_s\left(\tilde{R}\right) \leq FR_t\left(\tilde{R}\right) \text{ et} \\ FR_s(R) &\geq FR_t(R) \Leftrightarrow FR_s\left(\tilde{R}\right) \geq FR_t\left(\tilde{R}\right). \end{aligned}$$

Principe de Pareto faible (PF) :

$$r_s^j < r_t^j \; \forall j \in J \Rightarrow FR_s(R) < FR_t(R)$$

Absence de dictateur (ND) : Il n'existe aucun juge j tel que $FR(R) = r^j \; \forall R$.

Critère de Condorcet (CC) : Soit ν_{st} le nombre du juges qui placent le candidat s avant t. Si, pour un scrutin R, il existe un candidat s tel que $\nu_{st} > \nu_{ts} \; \forall t \neq s$, alors on doit avoir $FR_s(R) = 1$ et $FR_t(R) > 1 \; \forall t \neq s$.

Critère de Condorcet généralisé (CCG) : Soit $\{X_1, X_2, \ldots\}$ une partition de X telle que les X_α sont des singletons, des cycles de longueur maximale ou des classes d'ex aequo selon la règle de la majorité, et telle que :

$$\alpha < \beta, s \in X_\alpha, t \in X_\beta \Rightarrow \nu_{st} > \nu_{ts}$$

Alors, (CCG) exige que :

$$[\alpha < \beta, s \in X_\alpha, t \in X_\beta] \Rightarrow FR_s(R) < FR_t(R)$$

On retrouve l'idée de la partition ci-dessus dans Laslier (1997), Saari et Merlin (1997) et chez d'autres auteurs. On donne des noms différents aux éléments de cette partition. Entre autres, X_1 est souvent appelé le *cycle supérieur* ou l'*ensemble de Condorcet*. La plupart de ces auteurs éliminent toutefois la possibilité d'ex aequo et aucun ne semble avoir songé à utiliser cette partition pour construire un ordre de Kemeny.

Démonstration de la Proposition 2 : La satisfaction de (ND) et (PF) découle de la définition même de la règle. Il est facile de trouver des exemples de violation de (M) et (BI). Dans l'Exemple 2, si le juge 2 changeait son classement de $(3, 2, 4, 5, 1)$ pour $(4, 3, 2, 5, 1)$, alors le classement final serait changé de $(2, 1, 3, 4, 5)$ pour $(2, 3, 1, 4, 5)$. Autrement dit, l'ordre serait changé de BACDE pour CABDE. Le compétiteur B passerait après A, alors que son classement relatif par rapport à A est resté le même pour tous les juges. C'est une violation de (M). C'est aussi une violation de (BI) puisque le classement relatif final entre A et B dépend de ce qui arrive à C. Dans l'exemple de l'ISU, si le juge 9 permutait les rangs de B et E, le compétiteur C passerait avant B dans le classement final, ce qui constitue une autre violation de (M) et (BI), puisque le juge 9 n'a pas changé son classement relatif de B et C. Pour ce qui est de (CC), on n'a qu'à se reporter à l'Exemple 2. La règle de l'ISU classe A après B alors que quatre juges sur cinq le placent avant B.

A.3 Distance de Kemeny

Soit la fonction γ_{st} définie pour toute paire d'alternatives (s, t) et tout couple de pré-ordres $(\hat{r}, r)$ par :

$$\gamma_{st}(\hat{r}, r) = \begin{cases} 1 & \text{si } \hat{r}_s < \hat{r}_t \text{ et } r_s > r_t \\ \frac{1}{2} & \text{si } \hat{r}_s = \hat{r}_t \text{ et } r_s < r_t \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

Ensuite, on définit la métrique c^K sur l'ensemble des pré-ordres sur X par :

$$c^K(\hat{r}, r) = \sum_{s \in X} \sum_{\substack{t \in X \\ t > s}} \gamma_{st}(\hat{r}, r)$$

C'est cette métrique qui est utilisée dans le Tableau 5, pour comparer les différents classements. La distance δ^K entre un ordre r et un scrutin R est ensuite définie par :

$$\delta^K(r, R) = \sum_{i \in I} c^K\left(r, r^i\right)$$

C'est cette distance que minimise un ordre de Kemeny.

A.4 Ordre de Kemeny moyen

Étant donné un ensemble d'ordres de Kemeny $\left\{\hat{r}^1, \ldots, \hat{r}^k\right\}$, on définit le pré-ordre $\tilde{r}$ par :

$$\forall s, t \in X : \tilde{r}_s \leq \tilde{r}_t \Leftrightarrow \sum_{q=1}^{k} \hat{r}_s^q \leq \sum_{q=1}^{k} \hat{r}_t^q$$

S'il existe un ordre $\hat{r}^q \in \left\{\hat{r}^1, \ldots, \hat{r}^k\right\}$ tel que

$$\forall s, t \in X : \hat{r}_s^q < \hat{r}_t^q \Rightarrow \tilde{r}_s \leq \tilde{r}_t$$

on dit alors que $\tilde{r}$ est l'*ordre de Kemeny moyen*. En toute rigueur, il faudrait parler de pré-ordre car $\tilde{r}$ peut admettre des ex aequo.

B Le règlement 371 de l'ISU

Determination of results of each part of a competition

1. The competitor[25] placed first by the absolute majority of Judges in a part of the competition is first ; he who is placed second or better by an absolute majority is second and so on.
2. For this purpose, the place numbers 1 and 2 count as second place ; place numbers 1, 2 and 3 count as third place, and so on.
3. If two or more competitors have obtained a majority for the same place, the first among them is he who has been so placed by the greater number of Judges.
4. If such majorities are equal, then the lowest total of place numbers of those Judges forming the majority determines between them.
5. If the total of the place number is equal according to paragraph 4, the sum of the place numbers of all Judges determines the result ; if this is also equal the competitors are tied.
6. If there is no absolute majority for a place, the result for such place must be ascertained by seeking the best majority for the following place ; and if there is no such majority then by seeking the best majority for the next following place and so on.
7. If such majorities are equal under paragraph 6, the systems referred to in paragraphs 4 and 5 must be applied.
8. The ascertainment of each place must first be made in accordance with paragraphs 1 through 5, and thereafter according to paragraphs 6 and 7 in the above mentioned order.
9. a) If two or more competitors are temporarily tied with majorities for the same place, the place must be awarded to one of those competitors on the basis of paragraphs 3, 4 and 5. After awarding the place, the remaining temporarily tied competitor(s) must be awarded the next following place(s) on the basis of paragraphs 3, 4 and 5 without considering any additional competitors.

   b) In awarding the subsequent places thereafter, the unplaced competitors with a majority for the lowest numbered place shall be given first consideration.
10. If the foregoing rules fail to determine the award of any place, then the competitors tied for that place must be announced as tied. If two competitors so tie for first place, the next place to be awarded is third place (not second). If two skaters so tie for second place, the next place to be awarded is fourth place (not third) and so on.

[25] Le règlement ajoute toujours “or the team” après “competitor”. On l'a omis pour alléger le texte.

Références

Arrow, K.J., *Social Choice and Individual Values*, New York : John Wiley and Sons, 1951 ; second edition, 1963.

Bassett, W. et J. Persky, "Rating Skating," *Journal of the American Statistical Association*, 89 (1994), 1075-1079.

Borda, J.C. de, "Mémoire sur les élections au scrutin," Histoire de l'Académie royale des sciences, 1784.

Bossert, W. et T. Storcken, "Strategy-proofness of Social Welfare Functions : The Use of the Kemeny Distance Between Preference Orderings," *Social Choice and Welfare*, 9 (1992), 345-360.

Campbell, D.C. et G. Tullock, "A Measure of the Importance of Cyclical Majorities," *Economic Journal*, 75 (1965), 853-857.

Campbell, B. et J.W. Galbraith, "Non-Parametric Tests of the Unbiasedness of Olympic Figure Skating Judgements," *Journal of the Royal Statistical Society Ser. D. : The Statistician*, 4 (1996), 521-526.

Condorcet, Marquis de, *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*," Paris : Imprimerie royale, 1785, aussi reproduit dans Condorcet, *Sur les élections et autres textes*, edité par O. de Bernon, Fayard, 1986.

Drissi, M., "A statistical approach to the aggregation of votes," Thèse déposée en vue de l'obtention du grade de Ph.D., Université Laval, mai 2002.

Drissi, M. et M. Truchon, "The Kemeny Rule : An Extension to Variable Probabilities," mimeo 2002.

Fishburn, P.C., *The Theory of Social Choice*, Princeton : Princeton University Press, 1973.

Gibbard, A., "Manipulation of Voting Schemes : A General Result," *Econometrica*, 41 (1973), 587-601.

International Skating Union, *Regulations*, 1994.

Gordon, S. et M. Truchon, "Social choice, optimal inference and figure skating," mimeo, 2002.

Kelly, J.S., "Condorcet Winner Proportions," *Social Choice and Welfare*, 1 (1986), 311-314.

Kemeny, J. "Mathematics without Numbers," *Daedalus*, 88 (1959), 571-591.

Laslier, J.F., *Tournament Solutions and Majority Voting*, Springer-Verlag, 1997.

Laplace, P.S., *Oeuvres,* Tome 7, Paris : Imprimerie Royale, 1912.

Moulin, H., *Axioms of Cooperative Decision Making*, Cambridge : Cambridge University Press, 1988.

Muller, E. et M.A. Satterthwaite, “The Equivalence of Strong Positive Association and Strategy-proofness,” *Journal of Economic Theory*, 14 (1977), 412-418.

Rousseau, J.J., *Du Contrat Social*, Paris : 1762.

Saari, D.G., “Susceptibility to Manipulation,” *Public Choice*, 64 (1990), 21-41.

Satterthwaite, M.A., “Strategy-proofness and Arrow’s Condition : Existence and Correspondence Theorem for Voting Procedures and Social Welfare Functions,” *Journal of Economic Theory,* 10 (1975), 187-217.

Truchon M., “An Extension of the Condorcet Criterion and Kemeny Orders,” Cahier de recherche 9813, Département d’économique, Université Laval, octobre 1998.

Young, H.P., “An Axiomatization of Borda’s Rule,” *Journal of Economic Theory,* 9 (1974), 43-52.

Young, H.P., “Condorcet’s Theory of Voting,” *American Political Science Review,* 82 (1988), 1231-1244.

Young, H.P., “Optimal Voting Rules,” *Journal of Economic Perspectives*, 9 (1995), 51-64.

Young, H.P. et A. Levenglick, “A Consistent Extension of Condorcet’s Election Principle,” *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 35 (1978), 285-300.

	Classements des neuf juges									Critères				Classement final			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	ρ	n_ρ	B_ρ	B	ISU	Bor	CCG	Kem
A	1	1	1	1	1	3	1	4	4	1	6	6	17	1	1	1	1
B	3	3	2	2	1	1	2	3	3	2	5	8	20	2	2	2	2
C	2	2	4	3	3	2	3	1	1	2	5	8	21	3	3	3	3
D	6	6	5	6	4	7	5	2	2	5	5	18	43	4	4	4	4
E	4	4	6	4	7	6	8	5	5	5	5	22	49	5	5	5	5
F	4	5	8	7	5	4	4	8	8	5	5	22	53	6	6	6	6
G	8	8	3	9	9	5	6	6	6	6	5	26	60	7	7	7	7
H	7	7	7	5	6	9	7	7	7	7	8	53	62	8	8	8	8
I	11	10	12	12	10	11	12	11	11	11	6	64	100	9	10	?	11
J	12	9	13	11	8	8	13	9	12	11	5	45	95	10	9	9	9
K	10	12	11	10	13	10	14	10	15	11	5	51	105	11	12	?	10
L	13	11	14	8	11	13	11	14	10	11	5	51	105	11	12	?	13
M	9	13	9	14	15	14	9	12	9	12	5	48	104	13	11	?	12
N	15	15	10	13	12	12	10	15	13	13	6	70	115	14	14	14	14
O	14	14	15	15	14	15	15	13	14	14	5	69	129	15	15	15	15

Tableau 1 : Exemple de la ISU

s	Classements des cinq juges					Critères				Classement final			
	1	2	3	4	5	ρ	n_ρ	B_ρ	B	ISU	Bor	CCG	Kem
A	1	3	1	3	3	3	5	11	11	2	1	1	1
B	2	2	2	4	4	2	3	6	14	1	3	2	2
C	3	4	3	1	1	3	4	8	12	3	2	3	3
D	4	5	4	2	2	4	4	12	17	4	4	4	4
E	5	1	5	5	5	5	5	21	21	5	5	5	5

Tableau 2 : Exemple 2

s	Classements des sept juges							Critères				Classement final			
	1	2	3	4	5	6	7	ρ	n_ρ	B_ρ	B	ISU	Bor	CCG	Kem
A	2	2	2	6	6	6	1	2	4	7	25	1	3	?	2
B	3	3	3	1	1	1	6	3	6	12	18	2	1	?	3
C	4	4	4	4	4	4	2	4	7	26	26	4	4	?	4
D	5	5	6	3	3	2	3	3	4	11	27	3	5	?	5
E	1	1	1	5	5	5	5	5	7	23	23	6	2	?	1
F	6	6	5	2	2	3	4	4	4	11	28	5	6	?	6

Tableau 3 : Exemple 3

Patineur	ISU	Points	Borda	Kemeny
A	1	1	1	1
B	2	2	2	2
C	3	3	3	3
D	4	4	4	4
E	5	5	5	5
F	6	6	6	6
G	7	8	7	7
H	8	7	7	8
I	9	9	9	9
J	10	10	10	10
K	11	11	11	11
L	12	14	14	14
M	13	12	12	12
N	14	13	13	13
O	15	16	15	18
P	16	18	17	15
Q	17	14	15	17
R	18	19	19	20
S	19	17	18	16
T	20	19	20	19
U	21	21	21	21
V	22	22	22	22
W	23	23	23	23

Tableau 4 : Comparaison de quatre règles de classement sur le programme court des femmes aux Olympiques de 1988

Compétition	Programme court				Programme long				Remarques
		Kemeny	Borda	Points		Kemeny	Borda	Points	
Hommes 1976	ISU	4.5	2.5	3.5	ISU	2.	0	0	Un 6-cycle; = aux rangs 3-4; inversions dans 5-9, prog. court. Un 3-cycle; ex æquo (=) aux rangs 2-3 dans programme long.
	Points	3.	2.		Points	2.	0		
	Borda	3.			Borda	2.			
Hommes 1988	ISU	2.5	3.	7.5	ISU	2.	3.	5.	Trois 3-cycles dans programme court.
	Points	7.	4.5		Points	4.	2.		
	Borda	2.5			Borda	3.			
Hommes 1992	ISU	0.5	1.	2.	ISU	0	1.5	0.5	Un 3-cycle dans prog. court. Un 5-cycle et un 3-cycle dans programme long.
	Points	2.5	1.		Points	0.5	2.		
	Borda	1.5			Borda	1.5			
Hommes 1994	ISU	2.	1.5	3.5	ISU	1.5	3.5	5.5	Pas de cycle. Ex æquo (=) aux rangs 3-4 dans programme court.
	Points	1.5	2.		Points	4.	5.		
	Borda	1.5			Borda	3.			
Femmes 1976	ISU	2.5	1.	4.	ISU	1.	3.5	3.5	Pas de cycle. Inversion entre rangs 3-4; ex æquo aux rangs 5-6, 7-8, 9-10 dans programme court.
	Points	4.5	3.		Points	2.5	2.		
	Borda	1.5			Borda	3.5			
Femmes 1988	ISU	8.	5.	8.	ISU	2.	2.5	3.	Un 9-cycle (rangs 12-20) dans programme court. Inversions à partir de rang 12, les deux prog.
	Points	7.	3.		Points	3.	3.5		
	Borda	6.			Borda	3.5			
Femmes 1992	ISU	7.5	7.	6.5	ISU	1.5	4.	3.5	Deux 3-cycles; inversion entre rangs 7-8; = aux rangs 3-4 dans prog. court. Un 3-cycle; = aux rangs 1-2, 4-5, 10-11, prog. long.
	Points	4.	3.5		Points	5.	1.5		
	Borda	5.5			Borda	4.5			
Femmes 1994	ISU	4.5	3.	4.	ISU	2.	2.	5.5	Deux 3-cycles; inversion entre rangs 9-10 dans prog. court. = aux rangs 1-2 dans prog. long.
	Points	6.5	3.		Points	5.5	3.5		
	Borda	4.5			Borda	2.			
Couples 1976	ISU	2.	1.5	3.	ISU	1.	0	1.	Un 4-cycle (rangs 10-13) dans programme court.
	Points	3.	3.5		Points	2.	1.		
	Borda	3.5			Borda	1.			
Couples 1988	ISU	0	1.	0.5	ISU	0.5	0	2.	Pas de cycle. Ex æquo aux rangs 5-6 dans programme long.
	Points	0.5	0.5		Points	1.5	2.		
	Borda	1.			Borda	0.5			
Couples 1992	ISU	0	1.	1.	ISU	1.5	1.	2.	Pas de cycle. Ex æquo aux rangs 3-4 dans programme long.
	Points	1.	0		Points	0.5	1.		
	Borda	1.			Borda	0.5			
Couples 1994	ISU	1.	2.	2.	ISU	0.5	1.	2.	Pas de cycle.
	Points	1.	0		Points	1.5	1.		
	Borda	1.			Borda	0.5			

Tableau 5 : Comparaison de quatre règles de classement sur 24 compétitions olympiques : nombre de désaccords entre les ordres et faits saillants