2002RP-20

Partage des coûts et tarification des infrastructures Les jeux de coûts: Définitions et propriétés souhaitables des solutions

Marcel Boyer, Michel Moreaux, Michel Truchon

Rapport de projet
Project report

Montréal
Novembre 2002
Révisé en juin 2003

CIRANO
Centre interuniversitaire de recherche
en analyse des organisations

CIRANO

Le CIRANO est un organisme sans but lucratif constitué en vertu de la Loi des compagnies du Québec. Le financement de son infrastructure et de ses activités de recherche provient des cotisations de ses organisations-membres, d'une subvention d'infrastructure du ministère de la Recherche, de la Science et de la Technologie, de même que des subventions et mandats obtenus par ses équipes de recherche.

CIRANO is a private non-profit organization incorporated under the Québec Companies Act. Its infrastructure and research activities are funded through fees paid by member organizations, an infrastructure grant from the Ministère de la Recherche, de la Science et de la Technologie, and grants and research mandates obtained by its research teams.

Les organisations-partenaires / The Partner Organizations

•École des Hautes Études Commerciales
•École Polytechnique de Montréal
•Université Concordia
•Université de Montréal
•Université du Québec à Montréal
•Université Laval
•Université McGill
•Ministère des Finances du Québec
•MRST
•Alcan inc.
•AXA Canada
•Banque du Canada
•Banque Laurentienne du Canada
•Banque Nationale du Canada
•Banque Royale du Canada
•Bell Canada
•Bombardier
•Bourse de Montréal
•Développement des ressources humaines Canada (DRHC)
•Fédération des caisses Desjardins du Québec
•Hydro-Québec
•Industrie Canada
•Pratt & Whitney Canada Inc.
•Raymond Chabot Grant Thornton
•Ville de Montréal

ISSN 1499-8610 (Version imprimée) / ISSN 1499-8629 (Version en ligne)

Partage des coûts et tarification des infrastructures Les jeux de coûts Définitions et propriétés souhaitables des solutions*

Marcel Boyer[†], *Michel Moreaux*[‡], *Michel Truchon*[§]

Résumé / *Abstract*

On présente, dans ce mémoire, la notion de jeu de coûts. Un jeu de coûts est défini comme un jeu coopératif dans lequel le gain de la coopération est la réduction des dépenses permise par la réalisation coordonnée des projets d'un ensemble d'agents. Le problème est alors de savoir comment ces agents vont se répartir ce gain, c'est-à-dire cette réduction de coûts, ou de façon équivalente comment ils vont contribuer au financement de la dépense ainsi occasionnée. On recense les principaux types de jeux de coûts et on introduit les notions de pré-solution et de solution. Enfin on passe en revue les propriétés habituellement requises d'une solution.

In this document, we present the notion of a cost game, defined as a cooperative game where the gain from cooperation is the cost reduction obtained when the projects of a set of agents are realized in a coordinated way. The problem is then to decide how this gain will be shared among agents or similarly how the joint realization of the projects will be financed. We survey the different types of cost games and we introduce the notions of pre-solution and solution, as well as the usual properties that a solution should satisfy.

Mots clés: partage des coûts, tarification, infrastructures, jeux de coûts.

Keywords*: Cost sharing, Pricing, Infrastructures, Cost Games.*

---

* Cette version du rapport a été remise au Ministère des Finances du Québec (MFQ) dans le cadre d'un partenariat de recherche entre le MFQ et le CIRANO. Les auteurs tiennent à remercier le Ministère pour son soutien financier. Il va de soi qu'ils sont les seuls responsables des opinions et analyses contenues dans ce document, qui ne représentent pas nécessairement celles du CIRANO ou du MFQ. Les auteurs acceptent également la responsabilité de toute erreur qui aurait pu se glisser dans le texte.

[†] CIRANO et Département de sciences économiques, Université de Montréal

[‡] LEERNA, IDEI, IUF, Université de Toulouse I, **auteur principal**

[§] CIRANO, CIRPÉE et Département d'économique, Université Laval

Table des matières

Liste des tableaux

Table des figures

1 Introduction

L'objet de ce mémoire est de présenter la notion de jeu de coûts.[1] Un jeu de coûts est un jeu coopératif[2] dans lequel le gain de la coopération est la moindre dépense permise par la réalisation coordonée des projets d'un ensemble d'agents. Le problème est alors de savoir comment ces agents vont se répartir ce gain, c'est-à-dire cette réduction des coûts, ou de façon équivalente comment ils vont contribuer au financement de la dépense ainsi occasionnée.

Le mémoire est organisé comme suit. On définit formellement à la section 2 ce qu'il faut entendre par jeu de coûts et on en recense les principaux types. On introduit à la section 3 les notions de pré-solution et de solution. Enfin on passe en revue à la section 4 les propriétés habituellement requises d'une solution.

2 Jeux de coûts

2.1 Définitions

Soit $N = \{1, \ldots, i, \ldots, n\}$ l'ensemble des n premiers entiers naturels, ensemble des indices des joueurs ou ensemble des indices des projets,[3] et $\mathcal{N}$ l'ensemble des parties de N (y compris la partie vide que l'on note ϕ). On appelle *coalition de joueurs* ou *groupe de projets* toute partie de N, *grande coalition* ou *totalité des projets* N lui-même. Un *jeu de coûts* défini sur N est une application $c : \mathcal{N} \to I\!R_+$ qui possède les quatre propriétés suivantes :[4]

(i) *gratuité de l'inaction :*

$$c\,(\phi) = 0,$$

[1] Il s'agit du document [4] de la présente série sur le partage des coûts communs et la tarification des infrastructures. La liste de ces documents est donnée en annexe.

[2] Pour un exposé général de la théorie des jeux coopératifs, on pourra consulter l'ouvrage de Owen (1995) et pour son application aux problèmes d'imputation des coûts joints, on pourra se référer à Young (1994).

[3] On distinguera soigneusement l'ensemble N des joueurs d'un arrangement de ces mêmes joueurs. Dans un arrangement l'ordre des joueurs est spécifié.

[4] $I\!R^n$ désigne l'espace réel de dimension n, $I\!R^n_+$ sa partie non négative et $I\!R^n_{++}$ sa partie strictement positive. $I\!N$ désigne l'ensemble des entiers, $I\!N_+$ l'ensemble des entiers non négatifs et $I\!N_{++}$ l'ensemble des entiers positifs. Le cardinal de tout ensemble fini X est noté $|X|$.

(ii) *monotonicité :*

$$\forall S, T \in \mathcal{N} : S \subseteq T \Rightarrow c(S) \leq c(T),$$

(iii) *sous-additivité :*

$$\forall S, T \in \mathcal{N} : c(S \cup T) \leq c(S) + c(T),$$

(iv) *non-trivialité :*

$$0 < c(N) < \sum_{i \in N} c(\{i\}).$$

On appelle parfois *jeux essentiels* les jeux pour lesquels $c(N)$ est inférieur à la somme des $c(\{i\})$.

On dira qu'un jeu est strictement monotone si :

$$\forall S, T \in \mathcal{N} : S \subset T \Rightarrow c(S) < c(T),$$

et qu'il est strictement sous-additif si :

$$\forall S, T \in \mathcal{N} \setminus \phi : S \neq T \Rightarrow c(S \cup T) < c(S) + c(T).$$

La monotonicité stricte et la sous-addivité stricte impliquent respectivement :

$$c(\{i\}) > 0, \; i \in N \quad \text{et} \quad c(N) < \sum_{i \in N} c(\{i\}).$$

La condition de non-trivialité est donc superflue pour ce genre de jeu.

On peut considérer également un jeu de coûts défini sur N comme un point de l'espace réel de dimension 2^n. Notons[5] c les vecteurs de composantes c_S, $S \in \mathcal{N}$, $c \in \mathbb{R}_+^{2^n}$ et soit $\mathbb{C}_N$ la partie de $\mathbb{R}_+^{2^n}$ dont les éléments sont des jeux de coûts. Alors $c \in \mathbb{C}_N$ si :

(i') gratuité de l'inaction :

$$c_\phi = 0,$$

(ii') monotonicité :

$$\forall S, T \in \mathcal{N} : S \subseteq T \Rightarrow c_S \leq c_T,$$

[5] Nous notons de la même façon, c, la fonction $c : \mathcal{N} \to \mathbb{R}_+$ et le vecteur $c \in \mathbb{C}_N$. Aucune confusion n'est cependant possible.

(iii') sous-additivité :

$$\forall S, T \in \mathcal{N} : c_{S \cup T} \leq c_S + c_T,$$

(iv') non-trivialité :

$$0 < c_N < \sum_{i=1}^{n} c_{\{i\}}.$$

On note C_N l'ensemble des jeux de coûts définis sur N, c'est-à-dire soit l'ensemble des fonctions c qui vérifient les quatre conditions (i)-(iv), soit l'ensemble $\mathbb{C}_N$ des vecteurs c qui vérifient les conditions (i')-(iv'). Dans ce qui suit on appellera indifféremment un élément $c \in C_N$, soit un jeu de coûts défini sur N, soit une fonction de coûts définie sur $\mathcal{N}$. On appelle simplement jeu de coûts, tout couple (c, N) tel que $c \in C_N$. L'ensemble des jeux de coûts est donc l'ensemble

$$JC = \{(c, N) \mid |N| \in \mathbb{N}_{++}, c \in C_N\}$$

La signification de cette formalisation est la suivante : N est un ensemble d'agents autonomes qui ont chacun un *projet* à réaliser. Un projet est éventuellement décomposable en sous-projets, mais alors tous ces sous-projets sont à réaliser par le même agent. On peut voir N comme l'ensemble des projets eux-mêmes.

Ces projets peuvent être de natures très diverses. Le cas le plus simple est celui d'agents qui veulent disposer de différentes quantités d'un ou de plusieurs biens ordinaires. Regrouper leur production permet de tirer parti d'économies d'échelle ou de complémentarités.[6] Il peut s'agir aussi de biens publics que différentes autorités veulent mettre à la disposition de leurs administrés.

Considérons par exemple les municipalités d'une même communauté urbaine qui veulent, chacune, équiper leur territoire d'un éclairage public. Pour chaque municipalité i, un projet est un plan qui définit pour chaque voie, ou chaque portion de voie, du territoire qu'elle administre, un certain niveau d'intensité de l'éclairage à mettre en place.

[6] Pour un examen détaillé des gains ainsi permis les meilleurs ouvrages sont encore ceux de Baumol, Panzar et Willig (1982) et Sharkey (1982).

Considérons maintenant des villes situées au bord d'un même lac. Pour préserver la qualité des eaux du lac, chaque ville est dans l'obligation légale de traiter les eaux usées des ménages et des entreprises implantés sur son territoire. Le projet de la ville i est alors un système de collecte et de traitement des eaux usées avant rejet dans le lac.

Soit maintenant une vallée et dans cette vallée une compagnie d'électricité, un syndicat d'agriculteurs et une association des pêcheurs à la ligne. La compagnie d'électricité voudrait construire un barrage pour turbiner l'eau et produire de l'électricité selon un profil intra-annuel d'appels de charge bien spécifié. Les agriculteurs voudraient construire eux aussi un barrage qui leur garantirait un certain profil intra-annuel de disponibilités en eau pour irriguer les terres qu'ils cultivent. Le profil intra-annuel de leurs besoins n'est généralement pas le même que celui des hydro-électriciens. Enfin, les pêcheurs voudraient aussi construire un barrage qui permettrait de régulariser le débit de la rivière et garantir l'étiage en période de basses eaux, préservant ainsi la richesse de la flore aquatique, donc la qualité des frayères et par conséquent l'abondance des poissons. Pour la compagnie d'électricité, le projet est un certain type de barrage équipé de turbines[7] et un réseau de transport de l'électricité produite, du barrage jusqu'aux divers points d'entrée de son réseau de distribution. Pour le syndicat d'agriculteurs le projet est un barrage sans turbine, d'une capacité de rétention différente, et un réseau d'adduction de l'eau aux différentes parcelles à cultiver. Pour l'association des pêcheurs le projet est un barrage d'une capacité de rétention probablement différente de la capacité requise pour les deux autres projets.

Toute partie $S \in \mathcal{N}$ est un sous-ensemble des projets réalisés de façon coordonnée, c'est-à-dire de façon à minimiser le coût total de réalisation des projets en question ; $c(S)$ ou c_S s'interprète comme ce coût total minimisé. Le fait qu'on définisse la fonction c sur l'ensemble des parties de N signifie que pour toute partie S de N le coût total de réalisation ou bien ne dépend pas de l'ordre dans lequel on envisage la réalisation de ces projets, ou bien que l'ordre dans lequel ils seront réalisés est optimisé de façon à minimiser leur coût

[7] On suppose pour simplifier que l'eau est turbinée au pied du barrage.

global.[8] Dans l'exemple des villes qui doivent épurer leurs rejets, $c(S)$ est le coût d'un système de collecte et de traitement des eaux usées de toutes les municipalités $i \in S$ et d'aucune municipalité $j \notin S$. Dans l'exemple des barrages, convenons d'affecter l'indice 1 à la compagnie d'électricité, l'indice 2 au syndicat d'agriculteurs et l'indice 3 à l'association des pêcheurs. Alors $c(\{1,2\})$ est le coût de construction d'un barrage dont le volume de retenue permet de satisfaire les besoins en eau à turbiner de la compagnie d'électricité et les besoins en eau des agriculteurs,[9] barrage équipé de turbo-alternateurs, duquel partent deux réseaux, le réseau de transport de l'énergie produite aux points d'entrée dans le réseau de distribution de la compagnie d'électricité, et le réseau d'adduction de l'eau aux parcelles à irriguer des agriculteurs.

La formalisation est une formalisation en termes de coûts des projets. La seule caractéristique d'un projet à réaliser, ou d'un ensemble de projets qui importe ici, est son coût, et non ses caractéristiques physiques. Le même projet peut avoir des charactéristiques physiques identiques mais des coûts de réalisation différents pour deux agents car ces agents sont, par exemple, à même d'exercer des pressions différentes sur leurs fournisseurs qui leur accorderont donc des conditions de vente différentes. Si les agents sont des entreprises, ils peuvent également bénéficier, pour la réalisation de ces projets, de compétences qui leurs sont propres et qui diffèrent d'une entreprise à l'autre. Pour les mêmes raisons, deux groupes d'agents, deux coalitions, qui réalisent un ensemble de projets physiquement identiques, peuvent avoir à supporter des coûts différents. Inversement deux projets différents peuvent avoir des coûts identiques. Ce qui importe ce n'est pas la différence physique des projets mais la similitude ou la dissamblance de leurs coûts.

Les conditions (i) à (iv) s'interprètent comme suit. La condition (i) précise que s'il n'y a aucun projet à réaliser le coût à encourir est nul. La condition (ii) signifie que, partant d'un

[8] Si le coût de réalisation dépendait de l'ordre, il faudrait définir c sur la famille de tous les arrangements de sous-ensembles d'indices de N. On aurait par exemple pour les arrangements $a = (3,5,9)$ et $a' = (5,9,3)$ du sous-ensemble $S = \{3,5,9\}$, $c(a) \neq c(a')$.

[9] On suppose pour simplifier que le débit de la rivière suffit pour alimenter une retenue qui permettrait de satisfaire les besoins en eau des agents. En d'autres termes le profil intra-annuel des apports naturels et les profits intra-annuels des besoins des utilisateurs sont compatibles, comme dans l'exemple numérique traité en détail plus loin.

sous-ensemble S quelconque de projets, le coût total de réalisation coordonnée ne baisse pas lorsqu'on adjoint un ou plusieurs autres projets à l'ensemble S initialement considéré. Dans l'exemple des barrages $c(\{1,2\}) \leq c(\{1,2,3\})$ signifie que tenir compte des contraintes de maintien d'étiage auxquelles est sensible l'association des pêcheurs, ne peut pas faire baisser le coût de réalisation d'une retenue qui doit déjà garantir le flux d'approvisionnement des turbo-alternateurs que demande la compagnie d'électricité, ainsi que le flux nécessaire à l'irrigation. La condition (iii) énonce que le coût de réalisation d'un ensemble de projets est au plus égal à la somme des coûts de réalisation de ses parties, quelle que soit la partition de l'ensemble. En quelque sorte «qui peut le plus, peut le moins».

Mois	Débit naturel de la rivière	Débit voulu Électriciens	Débit voulu Agriculteurs	Débit voulu Pêcheurs
Janvier	1000	3000	0	500
Février	1000	2000	0	500
Mars	2500	1000	0	500
Avril	3500	0	0	500
Mai	2500	0	1000	500
Juin	1500	0	2000	500
Juillet	500	0	2500	500
Août	500	0	1500	500
Septembre	100	0	0	500
Octobre	2000	0	0	500
Novembre	3500	1500	0	500
Décembre	2500	3000	0	500
Cumulée sur l'année	21100	10500	7000	6000

Tableau 1 – Débit naturel et débits demandés par les agents

Pour illustrer pourquoi les deux propriétés (ii) et (iii) devraient être satisfaites, reprenons l'exemple des barrages dont les données sont présentées au tableau 1. Supposons aussi pour simplifier, que :

- au cours de chaque mois les débits instantanés sont constants ;
- la loi oblige ceux qui retiennent l'eau, qui construisent une retenue, à laisser dans la rivière le débit d'étiage lorsque le débit naturel lui est supérieur ;

- les pertes par évaporation de la masse d'eau retenue dans tout barrage, sont négligeables ;
- l'eau prélevée pour irrigation ne retourne pas dans le réseau hydrographique : elle part en totalité dans l'atmosphère soit par évaporation depuis le sol, soit par évapotranspiration des plantes, de sorte que les prélèvements pour irrigation sont des prélèvements nets.

S'il n'y a que le projet des pêcheurs à réaliser, il suffit de construire un réservoir dont la capacité de retenue est de $500 - 100 = 400$, pour remédier à l'insuffisance du débit naturel de la rivière au mois de septembre, le seul mois au cours duquel le débit naturel est inférieur au débit d'étiage demandé par l'association des pêcheurs.

S'il n'y a que le projet du syndicat d'agriculteurs à réaliser, il faut tenir compte du fait que l'eau prélevée pour irriguer est totalement perdue et donc le syndicat doit laisser dans la rivière le volume du débit d'étiage lorsque le débit naturel lui est supérieur. Pour compenser le déficit du débit du fleuve au cours du mois de juin, il faut détenir en réserve un volume égal à $2000+500-1500$, c'est-à-dire le débit appelé par les agriculteurs, soit 2000, augmenté du débit d'étiage, 500, diminué du flux d'apports naturel, 1500 ; pour le mois de juillet la réserve à détenir s'élève à $2500 + 500 - 500$ et pour le mois d'août à $1500 + 500 - 500$. Puisqu'au cours de ces trois mois consécutifs les demandes des agriculteurs sont supérieures au débit naturel, les réserves qu'il faut avoir accumulé fin mai, s'élèvent à 5000.

En général, du fait que les flancs des vallées sont évasés, et à cause de la pente du lit du fleuve, il est moins coûteux de construire un seul barrage d'une capacité de 5400 plutôt que deux barrages, l'un d'une capacité de 5000, l'autre d'une capacité de 400.[10]

La réalisation du seul projet des électriciens nécessite l'érection d'une retenue d'une capacité de 3500. En décembre la compagnie veut turbiner 3000, le débit naturel n'est que

[10] On notera qu'on dispose de débits suffisants tout au long de l'année pour constituer un stock de 5400 disponible fin mai, pour utilisation en juin, juillet, août et septembre. En effet, compte tenu de la contrainte d'étiage, en mai le solde du débit naturel net des retraits pour irrigation s'élève à 2500-500-1000=1500. En avril, le respect de la seule contrainte d'étiage permet d'accumuler 3500-500=3000. Enfin en mars on peut accumuler 2500-500=2000. Ce projet commun des agriculteurs et des pêcheurs est réalisable indépendamment du projet des électriciens qui turbinent 1000 au mois de mars. Il suffit que la retenue commune soit située en aval de celle des électriciens qui restituent l'eau après l'avoir turbinée.

de 2500 d'où un déficit de 500 ; en janvier elle veut turbiner 3000 alors que le débit n'est que de 1000, d'où un déficit de 2000 ; enfin en février elle veut turbiner 2000 tandis que le débit naturel n'est que de 1000, d'où un déficit de 1000.[11]

Le coût de réalisation coordonnée des projets des électriciens et des pêcheurs est égal au coût de réalisation du seul projet des électriciens. La retenue construite pour réaliser le seul projet des électriciens permet en effet de satisfaire aussi les besoins des pêcheurs.

Le coût de réalisation coordonnée des trois projets est le coût d'érection d'un barrage d'une capacité de retenue de 5400, équipé de turbo-alternateurs et des réseaux de transport de l'énergie et de l'adduction de l'eau. Ce coût sera évidemment moindre que le coût de réalisation de deux barrages, l'un d'une capacité de 3000 équipée des mêmes turbo-alternateurs, l'autre d'une capacité de 5400, coût qui devrait être engagé si d'une part la compagnie d'électricité agissait seule et si d'autre part le syndicat d'agriculteurs et l'association des pêcheurs agissaient de façon coordonnée. A fortiori le coût de construction du grand barrage équipé pour produire l'électricité est moindre que le coût d'érection des trois barrages qu'il faudrait édifier si les trois agents devaient mettre en oeuvre, chacun séparément, leurs projets.

On remarquera, pour en terminer avec la condition (iii), que la condition de sous-additivité implique que, pour toute partition $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_h, \ldots, P_m\}$ de l'ensemble des projets, on doit avoir :

$$\sum_{h=1}^{m} c\left(P_h\right) \geq c\left(N\right)$$

La condition (iv) exclut de l'étude les situations triviales dans lesquelles ou bien l'ensemble des projets à réaliser ne coûterait rien, ou bien leur réalisation coordonnée ne permettrait aucune économie.

[11] Là encore le débit naturel est suffisamment élevé pour accumuler un stock de 3000 disponible fin novembre. Compte tenu de la contrainte d'étiage, il est possible de constituer, au cours du mois de novembre un stock de 3500-1500=2000, car après turbinage les 1500 que veulent utiliser les électriciens sont restitués à la rivière de sorte que la contrainte d'étiage est satisfaite, et, au cours du mois d'octobre, un stock de 2000-500=1500. La constitution de cette réserve au cours des mois de novembre et d'octobre n'interfère pas avec la constitution de la réserve nécessaire à la réalisation des projets des agriculteurs et des pêcheurs qui a lieu au cours des mois de mars, avril et mai. Il n'y a donc pas de conflit pour l'appropriation de l'eau. C'est ce qui permet une formalisation en termes d'un pur jeu de coûts de construction de barrages de capacités de retenues différentes et de caractéristiques techniques également différentes.

Pour conclure, soulignons le fait que si chacune des quatre propriétés supposées de la fonction c, à savoir la gratuité de l'inaction, la monotonicité, la sous-additivité et la non-trivialité semble bien capter un aspect essentiel des situations dans lesquelles se pose un réel problème des gains de la coopération, leur ensemble constitue un tout difficilement réductible. En effet :

a) la gratuité de l'inaction et la monotonicité impliquent ensemble que :

$$\forall S \in \mathcal{N} : c(S) \geq 0$$

b) la gratuité de l'inaction, la monotonicité et le non-respect de la première des inégalités qui définissent la non-trivialité impliqueraient ensemble que :

$$\forall S \in \mathcal{N} : c(S) = 0$$

c) la gratuité de l'inaction, la monotonicité, la sous-additivité et le non-respect de la seconde des inégalités définissant la non-trivialité impliqueraient ensemble que :

$$\forall S \in \mathcal{N} \setminus \phi : c(S) = \sum_{i \in S} c(\{i\}).$$

On remarquera enfin que si les m fonctions $c^1, .., c^g, .., c^m$ définies sont $\mathcal{N}$ et à valeurs dans $I\!R_+$ vérifient les quatre conditions (i)-(iv), alors :

a) la fonction $c = \sum_{g=1}^{m} c^g$, somme des jeux $c^1, .., c^m$, définie ainsi :

$$\forall S \leq N : c(S) = \sum_{g=1}^{m} c^g(S),$$

vérifie ainsi les quatre conditions (i)-(iv) ; la somme d'un nombre fini de jeux mettant en présence le même ensemble de joueurs est elle-même un jeu ;

b) la fonction $c = \sum_{g=1}^{m} x^g c^g$, $0 \leq x^g \leq 1$, $g = 1, .., m$ et $\sum_{g=1}^{m} x^g = 1$, combinaison linéaire connexe des jeux $c^1, .., c^m$, définie ainsi :

$$\forall S \leq N : c(S) = \sum_{g=1}^{m} x^g c^g(S),$$

vérifie aussi les quatre conditions (i)-(iv) ; toute combinaison linéaire convexe d'un nombre fini de jeux mettant en présence le même ensemble de joueurs est donc elle-même un jeu.

Il est clair par ailleurs que si c est un jeu, alors, pour tout $\lambda > 0$, la fonction $c^{(\lambda)}$ définie par :

$$\forall S \leq N : c^{(\lambda)}(S) = \lambda c(S),$$

est elle-même en jeu ; la multiplication d'un jeu par un réel positif définit un nouveau jeu. On en conclut que $\mathbb{C}_N U \{0\}$ est un cône convexe.[12]

2.2 Quelques grandes classes de jeux de coûts

Distinguons les propriétés générales de la fonction c et les propriétés de décomposabilité de la structure des coûts.

2.2.1 Propriétés générales

Jeux à somme constante On dit qu'un jeu $c \in C_N$ est *à somme constante* si :[13]

$$\forall S \in \mathcal{N} : c(S) + c(N \backslash S) = c(N).$$

Pour ce genre de jeu la somme du coût de réalisation de tout sous-ensemble de projets S et du coût de réalisation du sous-ensemble complémentaire $N \backslash S$ est égale au coût de réalisation de l'ensemble des projets N. On peut se demander s'il existe de tels jeux qui soient aussi des jeux essentiels ou non triviaux. Le jeu suivant à trois agents montre que c'est bien le cas.

---

[12] Considérons un ensemble $\left\{x^1, .., x^g, .., x^m\right\}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On appelle cône convexe engendré par ces vecteurs l'ensemble des vecteurs x de la forme :

$$x = \sum_{g=1}^{m} \lambda^g x^g,$$

où $\left\{\lambda^1, .., \lambda^g, .., \lambda^m\right\}$ est un ensemble de réels non-négatifs quelconques.

[13] Soit X un ensemble, X_1 et X_2 deux sous-ensembles de X. On appelle soustraction ensembliste X_1 moins X_2, le sous-ensemble de X_1, noté $X_1 \backslash X_2$, défini par : $X_1 \backslash X_2 = \{x | x \in X_1, x \notin X_2\}$.

Exemple 1 Soit le jeu à trois joueurs dont la fonction de coûts est donnée par :

$$\begin{aligned}
&c(\{1\}) = 3\ ,\ c(\{2\}) = 5\ ,\ c(\{3\}) = 7,\\
&c(\{1,2\}) = 7\ ,\ c(\{1,3\}) = 9\ ,\ c(\{2,3\}) = 11,\\
&c(\{1,2,3\}) = 14.
\end{aligned}$$

Le jeu est à somme constante, car :

$$\begin{aligned}
&c(\{1\}) + c(\{2,3\}) = 3 + 11 = 14,\\
&c(\{2\}) + c(\{1,3\}) = 5 + 9 = 14,\\
&c(\{3\}) + c(\{1,2\}) = 7 + 7 = 14.
\end{aligned}$$

Par ailleurs le jeu est essentiel puisqu'on a :

$$c(\{1\}) + c(\{2\}) + c(\{3\}) = 3 + 5 + 7 = 15 > 14 = c(\{1,2,3\})$$

Il est assez évident que la somme de jeux essentiels est un jeu essentiel, que toute combinaison linéaire convexe de jeux essentiels est un jeu essentiel et qu'enfin la multiplication d'un jeu essentiel par un réel positif est aussi un jeu essentiel. Soit $\mathbb{C}_N^E$ l'ensemble des jeux essentiels vus comme des points de $\mathbb{R}^{2^n}$. Alors $\mathbb{C}_N^E U\{0\}$ est un cône convexe.

Jeux concaves Les jeux de coûts *concaves* constituent une classe de jeux particulièrement importante. Ce sont des jeux dans lesquels les incitations à coopérer sont puissantes et les solutions généralement faciles à calculer.

On dit que la fonction de coûts $c \in C_N$ est concave si l'une ou l'autre des deux conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

$$\forall i \in N, \forall Q, R \subseteq N\backslash\{i\} : Q \subseteq R \Rightarrow \quad c(Q \cup \{i\}) - c(Q) \geq c(R \cup \{i\}) - c(R). \qquad \text{(a)}$$

$$\forall S, T \subseteq N : c(S) + c(T) \geq c(S \cup T) + c(S \cap T). \qquad \text{(b)}$$

La condition (a) signifie que le coût additionnel encouru pour adjoindre un projet i à un groupe de projets R à réaliser de façon coordonnée est inférieur (stricto sensu n'est pas supérieur) au coût additionnel qu'il faudrait supporter pour l'adjoindre à un sous-groupe de projets plus restreint $Q \subseteq R$. Cette condition prend une forme remarquablement simple lorsque la fonction de coûts est symétrique (cf paragraphe suivant).

Il est clair que la condition (a) est un cas particulier de la condition (b). En effet soit $Q, R \subseteq N \backslash \{i\}$ et $Q \subseteq R$, posons $S = Q \cup \{i\}$ et $T = R$, et supposons la condition (b) satisfaite c'est-à-dire :

$$c(Q \cup \{i\}) + c(R) \geq c(Q \cup \{i\} \cup R) + c(\{Q \cup \{i\}\} \cap R)$$

Or $Q \subseteq R$ implique que $Q \cup \{i\} \cup R = R \cup \{i\}$ et, de plus, puisque $i \notin R$, on a aussi, $\{Q \cup \{i\}\} \cap R = Q$. L'inégalité ci-dessus se réduit donc à :

$$c(Q \cup \{i\}) + c(R) \geq c(R \cup \{i\}) + c(Q),$$

c'est-à-dire à la condition (a) :

$$c(Q \cup \{i\}) - c(Q) \geq c(R \cup \{i\}) - c(R).$$

On montre en appendice que, réciproquement, la condition (a) implique la condition (b). Les deux conditions sont donc équivalentes.

On remarquera que la concavité de la fonction de coût implique sa sous-additivité. C'est une conséquence immédiate de la condition (b). $c(S \cap T) \geq 0$ implique en effet que $c(S) + c(T) \geq c(S \cup T)$. On verra que la réciproque n'est pas vraie.

Un exemple de jeu concave est le jeu suivant. Considérons trois régions, indicées $i = 1, 2, 3$, qui veulent être reliées à un terminal gazier T pour leur alimentation en énergie et dont les localisations sont celles représentées à la Figure 1.

Les distances, en kilomètres, entre les différentes régions et le terminal sont portées à côté du segment correspondant. Les quantités à acheminer par unité de temps, les débits, du terminal à chaque région, sont les suivantes : Région 1 : 49 ,   Région 2 : 9,   Région 3 : 16.

Le coût de construction d'une liaison est proportionnel à sa longueur mais moins que proportionnel au débit à cause d'effets surface-volume bien connus.[14] On posera que le coût

[14]En général pour la construction d'un réservoir, le coût est à peu près proportionnel à la surface du contenant, qui croît comme le carré du rayon de la sphère pour un réservoir sphérique, ou comme le carré de

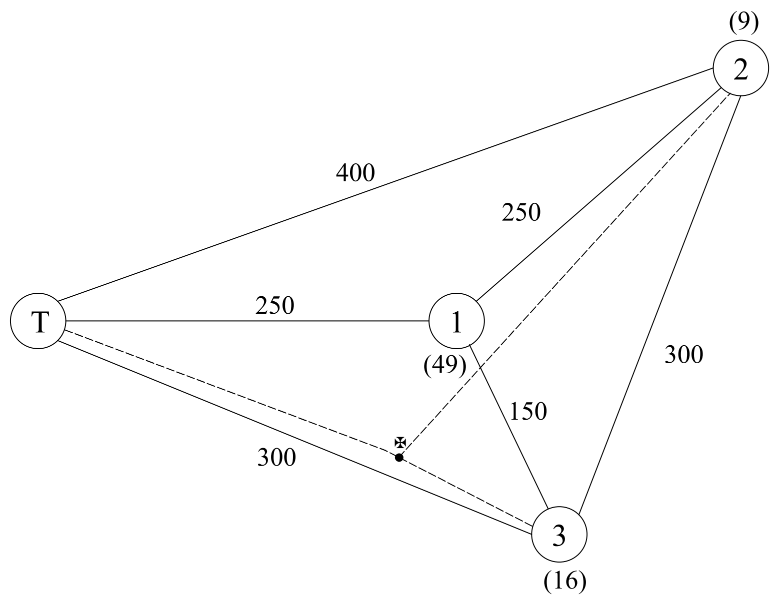

Figure 1 – Disposition géographique du terminal et des régions

d'une liaison de longueur l et de débit d est de la forme $a\ l\sqrt{d}$ où a est un coefficient qui dépend des unités de mesure et des conditions économiques générales. Pour le calcul, on prendra, pour obtenir le coût en millions de dollars : $a = 4$, $l =$ longueur en kilomètres, $d =$ débit exprimé dans la même unité que celle utilisée pour exprimer les besoins des régions.

On notera que :

- si les régions 2 et 3 devaient chacune construire un gazoduc, elles construiraient une liaison directe du terminal à la région concernée ;
- si les régions 2 et 3 devaient agir de concert, elles seraient indifférentes entre les deux solutions qui consistent :

---

la longueur du côté pour un réservoir cubique. La capacité du réservoir croît comme le cube du rayon ou le cube de la longueur du côté. Pour le réservoir sphérique si v est le volume et r le rayon, alors $v = \pi r^3$, soit $r = \pi^{-1/3} v^{1/3}$. La surface est égale à πr^2. Si le coût par unité de surface est égal à c, le coût total C est égal à $c\pi r^2$. En substituant à r son expression en fonction de v, on obtient le coût total en fonction du volume $C = c\ \pi^{1/3} v^{2/3}$. Pour un gazoduc d'une longueur donnée, le coût croît à peu près proportionnellement au diamètre du conduit, tandis que le débit admissible croît avec le carré du diamètre. Donc le coût par unité de longueur est de la forme $a\sqrt{d}$, où a est un paramètre positif et d est le débit.

· l'une à construire deux conduits l'un du terminal à 2 et l'autre du terminal à 3, ce qu'elles feraient si elles agissaient indépendemment l'une de l'autre et qui coûte : $(4 \times 400 \times \sqrt{9}) + (4 \times 300\sqrt{16}) = 4800 + 4800 = 9600$

· l'autre à construire un conduit entre T et 3 d'une capacité de $16 + 9 = 25$, puis un conduit de 3 à 2 d'une capacité de 9 et qui coûte : $(4 \times 300 \times \sqrt{25}) + (4 \times 300 \times \sqrt{9}) = 6000 + 3600 = 9600$

La première solution ne fait pas jouer les phénomènes de rendements croissants puisqu'il n'y a pas de conduit commun. Mais elle minimise le parcours que doit effectuer le fluide à livrer. En effet, avec cette solution, le parcours moyen d'une unité de gaz liquéfié est égal à $[(400 \times 9) + (300 \times 16)]/25 = 336$ km. La seconde solution permet de bénéficier d'économies d'échelle le long du tronc commun de 300 km entre T et 3. Mais elle allonge le parcours des unités qui sont acheminées de T à 2, de $600 - 400 = 200$ km, le parcours moyen d'une unité de fluide s'élevant maintenant à $[(300 \times 25) + (300 \times 9)]/25 = 408$ km. Par rapport à la première solution, le gain permis par les rendements d'échelle sur le parcours commun est exactement perdu dans l'allongement de la distance que doivent parcourir les unités livrées en 2.[15]

On néglige pour simplifier les solutions qui consisteraient à construire un tronc commun de T à X, X situé en un endroit quelconque éventuellement confondu avec 1 mais pas nécessairement, puis deux liaisons, l'une de X à 2 et l'autre de X à 3. Un réseau de ce type est représenté en pointillés à la Figure 1.

[15] La solution qui consisterait pour 2 et 3 à construire une liaison d'un débit de 25 entre T et 1, une liaison d'un débit de 9 entre 1 et 2 et enfin une liaison d'un débit de 16 entre 1 et 3, coûterait : $\left(4 \times 250 \times \sqrt{25}\right) + \left(4 \times 250 \times \sqrt{9}\right) + \left(4 \times 150 \times \sqrt{16}\right) = 5000 + 3000 + 2400 = 10400$

Par rapport à la solution avec tronc commun entre T et 3, cette configuration de réseau réduit le tronc commun de 50 km, allonge de 100 km le parcours des unités à acheminer en 3, $250 + 150 = 400$ km au lieu de 300, et réduit de 100 km le parcours des unités à acheminer en 2, $250 + 250 = 500$ km au lieu de 600. Mais il y a plus d'unités à acheminer en 3 qu'en 2, et donc le coût augmente. Le parcours moyen d'une unité à livrer est ici de $[(250 \times 25) + (250 \times 9) + (150 \times 16)]/25 = 446$ km, au lieu de 408.

La fonction de coût a la structure suivante :[16]

$$c(\{1\}) = 7000 \ , \ c(\{2\}) = 4800 \ , \ c(\{3\}) = 4800$$
$$c(\{1,2\}) = 10616 \ , \ c(\{1,3\}) = 10462 \ , \ c(\{2,3\}) = 9600$$
$$c(\{1,2,3\}) = 14002$$

Cette fonction est sous-additive. En effet :

$$c(\{1,2\}) = 10616 \leq 11800 = c(\{1\}) + c(\{2\})$$
$$c(\{1,3\}) = 10462 \leq 11800 = c(\{1\}) + c(\{3\})$$
$$c(\{2,3\}) = 9600 \leq 9600 = c(\{2\}) + c(\{3\})$$

$$c(\{1,2,3\}) = 14002 \leq \begin{cases} 16600 = c(\{1\}) + c(\{2\}) + c(\{3\}) \\ 16600 = c(\{1\}) + c(\{2,3\}) \\ 15416 = c(\{1,2\}) + c(\{3\}) \\ 15262 = c(\{1,3\}) + c(\{2\}) . \end{cases}$$

Ces inégalités impliquent que la condition (a) est satisfaite. En effet :

– pour le projet 1, on a :

$$c(\{1\}) = 7000 \geq \left\{ \begin{array}{c} c(\{1,2\}) - c(\{2\}) = 5816 \\ c(\{1,3\}) - c(\{3\}) = 5662 \end{array} \right\} \geq c(\{1,2,3\}) - c(\{2,3\}) = 4402$$

– pour le projet 2, on a :

$$c(\{2\}) = 4800 \geq \left\{ \begin{array}{c} c(\{1,2\}) - c(\{1\}) = 3616 \\ c(\{2,3\}) - c(\{3\}) = 4800 \end{array} \right\} c(\{1,2,3\}) - c(\{1,3\}) = 3450$$

– pour le projet 3, on a :

$$c(\{3\}) = 4800 \geq \left\{ \begin{array}{c} c(\{1,3\}) - c(\{1\}) = 3462 \\ c(\{2,3\}) - c(\{2\}) = 4800 \end{array} \right\} c(\{1,2,3\}) - c(\{1,2\}) = 3386$$

[16] Pour les calculs, on a retenu : $\sqrt{58} = 7,616$, $\sqrt{65} = 8,062$ et $\sqrt{74} = 8,602$.

Le jeu est donc bien concave.

On remarquera que la somme de jeux concaves est un jeu concave, que toute combinaison linéaire convexe de jeux concaves est un jeu concave et que la multiplication d'un jeu concave par un réel positif est encore un jeu concave. Soit $\mathbb{C}_N^C$ l'ensemble des jeux concaves vus comme des points de $\mathbb{R}^{2^n}$. Alors $\mathbb{C}_N^C U \{0\}$ est un cône convexe.

Jeux symétriques Un jeu *symétrique* est un jeu dans lequel le coût de tout sous-ensemble de projets à réaliser ne dépend que du nombre de projets du sous-ensemble en question. Formellement la fonction de coûts $c \in C_N$ est symétrique si :

$$\forall S, T \in \mathcal{N} : |S| = |T| \Rightarrow c(S) = c(T).$$

Un exemple de jeu symétrique serait la situation où chaque agent i veut disposer de la même quantité $q_i = q$ d'un certain bien, ou disposer d'un même vecteur de biens, les coûts de production de ces vecteurs ou de leurs multiples ne dépendant pas de l'agent ou du groupe d'agent qui les produit ou les fait produire.

Dans ce genre de jeux la fonction de coûts est une collection de n nombres $\bar{c}(m), m = 1, 2, \ldots, n$, $\bar{c}(m)$ étant le coût de réalisation coordonnée de m projets différents. Une telle fonction est concave si, pour tout $m = 1, \ldots, n-1$, on a $\bar{c}(m) - \bar{c}(m-1) \geq \bar{c}(m+1) - \bar{c}(m)$, en convenant de noter $c(\phi)$ par $c(0)(= 0)$. La courbe obtenue en joignant les points de coordonnées $(m, \bar{c}(m))$ (cf Figure 2) est concave. On notera que $\Delta c(m)$, l'accroissement $c(m) - c(m-1)$, une fonction décroissante de m.

Puisque dans ce genre de jeu le coût de réalisation coordonnée ne dépend que de la taille du groupe de projets à réaliser, assimilée à leur nombre, on peut sans ambiguïté définir le coût moyen d'un projet de tout groupe de taille m, comme le rapport $\bar{c}(m)/m$. La fonction de coûts est concave si le coût moyen d'un projet décroît lorsque la taille du groupe dans le cadre duquel il est réalisé, augmente. Les conditions (a) et (b) peuvent être vues comme deux généralisations équivalentes de cette propriété aux cas de fonctions de coûts non-symétriques.

On remarquera que, même dans les jeux symétriques, la sous-additivité de la fonction de coûts n'implique pas la concavité du jeu, comme le montre l'exemple suivant.

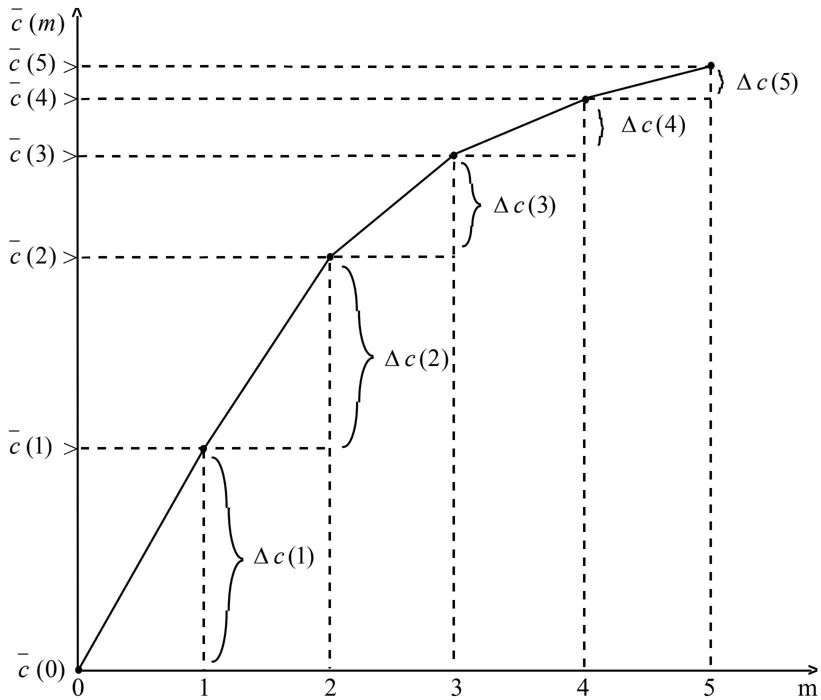

Figure 2 – Graphe d'un jeu de coût symétrique et concave

Exemple 2 Soit le jeu symétrique à quatre joueurs défini par :

$$\bar{c}\,(1) = 1\ ,\ \bar{c}\,(2) = 1.5\ ,\ \bar{c}\,(3) = 2.5\ ,\ \bar{c}\,(4) = 3.$$

Cette fonction de coût est sous-additive :

$$\bar{c}\,(2) = 1.5 < 2 = 2\bar{c}\,(1)$$

$$\bar{c}\,(3) = 2.5 < \begin{cases} 3 = 3\bar{c}\,(1) \\ 3.5 = 2\bar{c}\,(1) + \bar{c}\,(2) \end{cases}$$

$$\bar{c}\,(4) = 3 \leq \begin{cases} 4 = 4\bar{c}\,(1) \\ 3.5 = 2\bar{c}\,(1) + \bar{c}\,(2) = \bar{c}\,(1) + \bar{c}\,(3) \\ 3 = 2\bar{c}\,(2) \end{cases}$$

Mais ce jeu, dont le graphe est représenté à la Figure 3, n'est clairement pas concave.

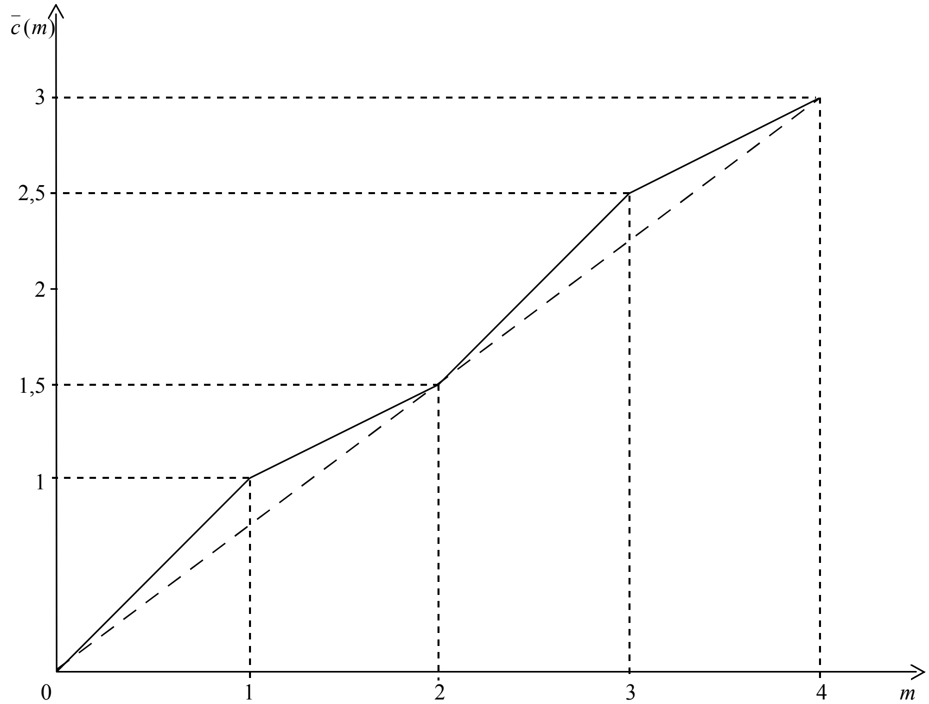

Figure 3 – Jeu symétrique, sous-additif et non-concave

Jeux à rendements croissants Enfin, il est clair que la somme de jeux symétriques est un jeu symétrique, que toute combinaison linéaire convexe de jeux symétriques est un jeu symétrique et que la multiplication d'un jeu symétrique par un réel positif est aussi un jeu symétrique. Notons $\mathbb{C}_N^S$ l'ensemble des jeux symétriques, vus comme des points de $\mathbb{R}^{2^n}$. Alors $\mathbb{C}_N^S U \{0\}$ est un cône convexe. Dans les jeux symétriques, on peut définir le coût moyen de réalisation d'un ensemble de projets car, ces projets étant indistingables les uns des autres pour ce qui concerne les coûts, on leur affecte naturellement le même poids, posé conventionnellement égal à 1. Le poids ou la taille d'une coalition est égal au nombre des projets qu'elle doit réaliser, c'est-à-dire la somme des poids des projets qu'elle doit mener à bien, et le coût moyen de réalisation de chaque projet est posé égal au coût de réalisation de l'ensemble, divisé par la taille de la coalition en question. Le jeu est à rendements croissants lorsque le coût moyen décroit avec la taille. Ceci suggère une autre généralisation de la notion de rendements croissants que celle qu'essaye de capter la notion de jeu concave lorsque les différents projets n'affectent pas les coûts de la même façon.[17]

Pour tout *système de poids individuels* $\gamma = (\gamma_1, \cdots, \gamma_n) \in I\!R_+^n \setminus \{0\}$ et pour toute coalition $S \subseteq N$ définissons le *poids* ou la *taille* $\gamma(S)$ de cette coalition comme la somme des poids des projets qui y figurent, la coalition ϕ se voyant attribuer un poids nul :

$$\forall S \subseteq N : \gamma(S) = \begin{cases} \sum\limits_{i \in S} \gamma_i & \text{si} \quad S \neq \phi \\ 0 & \text{si} \quad S = \phi \end{cases}$$

On dit que le jeu $c \in C_N$ est à *rendements croissants par rapport à* γ si :

$$\forall S, T \subseteq N : S \subseteq T \Rightarrow \gamma(T)c(S) \geq \gamma(S)c(T).$$

Lorsque $\gamma_i > 0, \forall i \in N$,[18] un jeu est à rendements croissants si :

$$\forall S, T \in \mathcal{N} \backslash \phi : S \subseteq T \Rightarrow \frac{c(S)}{\gamma(S)} \geq \frac{c(T)}{\gamma(T)}.$$

Le coût moyen de réalisation des projets d'une coalition R, $c(R)/\gamma(R)$, décroit avec la taille de la coalition, mesurée par $\gamma(R)$. Cependant, puisque la mesure de la taille des coalitions est en partie arbitraire, on ne se permet de comparer deux coalitions S et T que si l'une est indiscutablement plus grande que l'autre, d'où la condition $S \subseteq T$.

Il est clair que si le jeu est à rendements croissants par rapport à γ, il l'est aussi par rapport à $\lambda\gamma, \lambda > 0$. Soit G l'ensemble des vecteurs γ pour lesquels le jeu est à rendements croissants. Alors $G \cup \{0\}$ est un cône convexe.

Un jeu est à *rendements croissants* s'il existe un vecteur de poids γ par rapport auxquels les rendements sont croissants.

La classe des jeux à rendements croissants et la classe des jeux concaves ne se confondent pas. Le jeu de l'exemple 3 est un jeu concave qui n'est pas à rendements croissants et le jeu de l'exemple 4, un jeu à rendements croissants qui n'est pas concave.

[17] Cette généralisation a été proposée récemment par Izquierdo et Rafels (2001).

[18] C'est le cas si le jeu est strictement monotone. Si le jeu est à rendements croissants, il existe un joueur j au moins pour lequel $\alpha_j > 0$. Considérons alors n'importe quel autre joueur $i \neq j$. On doit avoir $(\gamma_i + \gamma_j) c(\{i\}) > \alpha_j c(\{i, j\})$. Cette inégalité, l'inégalité $c(\{i, j\}) > c(\{i\})$ et $\gamma_j > 0$ impliquent que $\gamma_i > 0$.

Exemple 3 Soit le jeu à quatre projets dont les coûts de réalisation sont les suivants :

$$\begin{aligned}
\forall i &\in N : c\left(\{i\}\right) = 5 \\
\forall S &\subseteq N, |S| = 2 : c(S) = \begin{cases} 9 & \text{si} \quad S \in \{\{1,2\}, \{3,4\}\} \\ 10 & \text{sinon} \end{cases} \\
\forall S &\subseteq N, |S| = 3 : c(S) = 14, \text{ et } c(N) = 18.
\end{aligned}$$

Montrons d'abord que la condition (a) définissant un jeu concave est satisfaite.

Pour les coalitions de trois projets, on a :

$$\forall S \subseteq N, \ |S| = 3 \text{ et } \forall i \notin S : c\left(S \cup \{i\}\right) - c(S) = 4,$$

et pour les coalitions de deux projets :

$$\forall R \subseteq N, \ |R| = 2, \text{ et } \forall i \notin R :$$

$$c\left(R \cup \{i\}\right) - c(R) = \begin{cases} 5 & \text{si} \quad R = \{1,2\} \text{ et } i \in \{3,4\} \\ \text{ou} & \text{si} \quad R = \{3,4\} \text{ et } i \in \{1,2\} \\ 4 & \text{sinon} \end{cases} .$$

On en déduit que :

$$\forall S \subseteq N, \ |S| = 3, \quad \forall R \subseteq N, |R| = 2 \text{ et } R \subseteq S, \text{ et } \forall i \notin S :$$

$$c\left(R \cup \{i\}\right) - c(R) \geq 4 = c\left(S \cup \{i\}\right) - c(S).$$

Pour les coalitions d'un seul projet, on a :

$$\forall Q \subseteq N, \ |Q| = 1, \text{ et } \forall i \notin Q :$$

$$c\left(Q \cup \{i\}\right) - c(Q) = \begin{cases} 5 & \text{si} \quad Q \in \{\{1\}, \{2\}\} \text{ et } i \in \{3,4\} \\ \text{ou} & \text{si} \quad Q \in \{\{3\}, \{4\}\} \text{ et } i \in \{1,2\} \\ 4 & \text{sinon} \end{cases} .$$

On déduit de cette relation et des deux relations précédentes que :

$$\forall S \subseteq N, \ |S| = 3, \quad \forall Q, \ |Q| = 1 \text{ et } Q \subseteq S, \text{ et } \forall i \notin S :$$

$$c\left(Q \cup \{i\}\right) - c(Q) \geq 4 = c\left(S \cup \{i\}\right) - c(S),$$

et,

$$\forall R \subseteq N,\ |R| = 2,\ \ \forall Q \subseteq N,\ |Q| = 1 \ \text{ et }\ Q \subseteq S,\ \text{ et } \forall i \notin R :$$
$$c\left(Q \cup \{i\}\right) - c(Q) = c\left(R \cup \{i\}\right) - c(R).$$

Montrons maintenant que, si ce jeu devait être à rendements croissants pour un certain vecteur de poids non négatifs γ, ces poids seraient nécessairement nuls. On devrait avoir en effet :

$$\begin{aligned} \forall i &\in \{3,4\} : (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_i)\, c\left(\{1,2\}\right) \geq (\gamma_1 + \gamma_2)\, c\left(\{1,2,i\}\right) \\ &\Rightarrow \gamma_i \geq 5\left(\gamma_1 + \gamma_2\right)/9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall i &\in \{1,2\} : (\gamma_i + \gamma_3 + \gamma_h)\, c\left(\{3,4\}\right) \geq (\gamma_3 + \gamma_4)\, c\left(\{i,3,4\}\right) \\ &\Rightarrow \gamma_i \geq 5\left(\gamma_3 + \gamma_4\right)/9 \end{aligned}$$

d'où :

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 \geq 10\left(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4\right)/9,$$

ce qui n'est possible que si $\gamma_i = 0$, $i \in N$.

Exemple 4 Soit le jeu à trois projets dont la fonction de coûts est la suivante :

$$\forall i \in N : c\left(\{i\}\right) = 5,\ c\left(\{1,2\}\right) = 7.5,\ \ c\left(\{1,3\}\right) = 7,\ c\left(\{2,3\}\right) = 9 \ \text{ et }\ c\left(\{1,2,3\}\right) = 10.$$

Ce jeu n'est pas concave car :

$$c\left(\{1,3\}\right) - c\left(\{1\}\right) = 2 < 2.5 = c\left(\{1,2,3\}\right) - c\left(\{1,2\}\right).$$

Mais il est à rendements croissants pour les poids $\gamma_i = 1, i \in N$. En effet :

– pour les coalitions de un et deux projets, on a :

$$\begin{array}{lclcl} (\gamma_1 + \gamma_2)\, 5 \geq \gamma_1 7.5 & \text{et} & (\{\gamma_1 + \gamma_2\}\, 5 \geq \gamma_2 7.5) & \Leftrightarrow & 10 \geq 7.5 \\ (\gamma_1 + \gamma_3)\, 5 \geq \gamma_1 7 & \text{et} & (\{\gamma_1 + \gamma_3\}\, 5 \geq \gamma_3 7) & \Leftrightarrow & 10 \geq 7 \\ (\gamma_2 + \gamma_3)\, 5 \geq \gamma_2 9 & \text{et} & (\{\gamma_2 + \gamma_3\}\, 5 \geq \gamma_3 9) & \Leftrightarrow & 10 \geq 9 \end{array}$$

– pour la grande coalition et les coalitions de deux joueurs :

$$\begin{array}{lclcl} (\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)\,7.5 & \geq & (\gamma_1+\gamma_2)\,10 & \Leftrightarrow & 22.5 \geq 20 \\ (\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)\,7 & \geq & (\gamma_1+\gamma_3)\,10 & \Leftrightarrow & 21 \geq 20 \\ (\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)\,9 & \geq & (\gamma_2+\gamma_3)\,10 & \Leftrightarrow & 27 \geq 20 \end{array}$$

On remarquera que, dans ce jeu, le vecteur γ pour lequel le jeu est à rendements croissants, n'est pas unique.

On verra que pour les jeux à rendements croissants, certaines solutions ou parties de solutions sont très faciles à calculer. Il est trivial de constater que la multiplication d'un jeu à rendements croissants pour l'ensemble de poids G , est un jeu à rendements croissants pour le même ensemble de poids. Mais la somme de jeux à rendements croissants n'est pas nécessairement un jeu à rendements croissants, ni donc leur combinaison linéaire non plus, comme le montre l'exemple 5.

Exemple 5 Considérons les jeux à quatre joueurs, c, c' et c'', $c = c' + c''$, suivants :

$$c'(S) = \begin{cases} 19 & \text{si} \quad \{1,2\} \leq S \\ 10 & \text{si} \quad i \in S \text{ et } j \notin S, \quad i,j \in \{1,2\} \text{ et } i \neq j \\ 0 & \text{si} \quad \{1,2\} \cap S = \phi \end{cases}$$

$$c''(S) = \begin{cases} 19 & \text{si} \quad \{3,4\} \leq S \\ 10 & \text{si} \quad i \in S \text{ et } j \notin S, \quad i,j \in \{3,4\} \text{ et } i \neq j \\ 0 & \text{si} \quad \{3,4\} \cap S = \phi \end{cases}$$

$$c(S) = \begin{cases} 48 & \text{si} \quad S = N \\ 29 & \text{si} \quad |S| = 3 \\ 20 & \text{si} \quad |S| = 2 \text{ et } S \notin \{\{1,2\},\{3,4\}\} \\ 19 & \text{si} \quad |S| = 2 \text{ et } S \in \{\{1,2\},\{3,4\}\} \\ 10 & \text{si} \quad S = \{i\}, i \in N \end{cases}$$

Les jeux c' et c'' sont semblables, en ce sens que les rôles tenus par les joueurs 1 et 2 dans c' sont ceux que tiennent 3 et 4 dans c'' et les rôles tenus par les joueurs 3 et 4 dans c' sont ceux que tiennent les joueurs 1 et 2 dans c''. On laisse au lecteur le soin de vérifier que c' (resp. c'') est un jeu à rendements croissants pour les poids $\gamma'_1 = \gamma'_2 = \frac{1}{2}$ et $\gamma'_3 = \gamma'_4 = 0$ (resp. $\gamma''_1 = \gamma''_2 = 0$ et $\gamma''_3 = \gamma''_4 = \frac{1}{2}$).

Montrons maintenant que la somme de ces deux jeux, le jeu c, n'est pas à rendements croissants. Supposons qu'il le soit pour des poids $\gamma_i, i \in N$. On devrait alors avoir :

$$\forall i \in \{3,4\} : (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_i)\, 19 \geq (\gamma_1 + \gamma_2)\, 29$$

d'où

$$19\gamma_i \geq 10\,(\gamma_1 + \gamma_2)\,;$$

$$\forall i \in \{1,2\} : (\gamma_i + \gamma_3 + \gamma_4)\, 19 \geq (\gamma_3 + \gamma_4)\, 20$$

d'où

$$19\gamma_i \geq 10\,(\gamma_2 + \gamma_3)\,.$$

En sommant ces inégalités, on obtient :

$$19\,(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4) \geq 20\,(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4)\,,$$

ce qui n'est pas possible que si $\gamma_i = 0, i \in N$, d'où la contradiction.

2.2.2 Propriétés de décomposition

Les efforts de décomposition des coûts visent à isoler cette partie des coûts que la coopération des joueurs permet de réduire.

Décomposition en coûts spécifiques ou directs et coûts joints Considérons à nouveau l'exemple de l'aménagement hydraulique qui réunit électriciens, agriculteurs et pêcheurs. Le projet de la compagnie d'électricité est décomposable en trois composantes principales : une retenue d'une certaine capacité, des machines transformatrices d'énergie d'une certaine puissance et un réseau de transport de l'énergie électrique depuis le site du barrage jusqu'à son réseau de distribution. Une partie de ces dépenses devra de toute façon être engagée, quel que soit le mode réalisation (coordonnée ou non) de la retenue. Ce sont les dépenses en équipements de transformation de l'énergie d'une part et en transport d'autre part.

En revanche le coût de réalisation de la retenue dépend de façon critique du fait qu'elle doit satisfaire ou non, les exigences de tel ou tel des partis en présence. Le projet du syndicat d'agriculteurs admet une décomposition analogue. Quel que soit le mode de réalisation de la retenue, il faudra construire un réseau d'adduction de l'eau, du barrage jusqu'aux parcelles à irriguer, dont le coût est indépendant du type de barrage qui sera finalement édifié. Dans certains cas, il est donc possible de décomposer naturellement les coûts en coûts directs ou spécifiques à chaque projet d'une part et coûts joints d'autre part, décomposition qu'on peut formaliser comme suit.

Étant donné un jeu de coûts (c, N) et un vecteur de coûts directs ou coûts spécifiques $d \in I\!R_+^n$, on dit que ce jeu admet une *décomposition en coûts directs et coûts joints selon* d, s'il existe une fonction $\hat{c}_d : \mathcal{N} \to I\!R_+$ qui vérifie les deux conditions suivantes :

- $c(\phi) = 0 \qquad$ et $\qquad \forall S \in \mathcal{N} \backslash \phi : \hat{c}_d(S) = c(S) - \sum_{i \in S} d_i$,
- $(\hat{c}_d, N)$ est lui-même un jeu de coûts.

La fonction $\hat{c}_d$ doit donc vérifier les propriétés suivantes, outre la gratuité de l'inaction qu'elle vérifie par construction : monotonicité, sous-additivité et non-trivialité.

Montrons que la seule propriété, dont il suffit de s'assurer que la fonction $\hat{c}_d$ la possède, est la monotonicité. En effet, si $\hat{c}_d$ est monotone :

a) on déduit de $\hat{c}_d(\phi) = 0$ que $\hat{c}_d(S) \geq 0, \forall S \in \mathcal{N}$, condition requise pour que $(\hat{c}_d, N)$ soit un jeu de coûts ;

b) la sous-additivité de c implique celle de $\hat{c}_d$. Considérons deux coalitions S et T différentes de ϕ et N et distinguons selon que $S \cap T = \phi$ ou $S \cap T \neq \phi$:

   - si $S \cap T = \phi$, alors $\hat{c}_d(S \cup T) = c(S \cup T) - \sum_{i \in S \cup T} d_i$ et la sous-additivité de c, $c(S \cup T) \leq c(S) + c(T)$, implique que $\hat{c}_d(S \cup T) \leq c(S) - \sum_{i \in S} d_i + c(T) - \sum_{i \in T} d_i = \hat{c}_d(S) + \hat{c}_d(T)$;

– si $S \cap T \neq \phi$, soit $\bar{S} = S \backslash \{S \cap T\}$ et alors, puisque $\bar{S} \cup T = S \cup T$ et $\bar{S} \cap T = \phi$, ce qu'on vient de montrer au point précédent implique, après identification de $\bar{S}$ à S dans les relations ci-dessus, que :$\hat{c}_d (S \cup T) = \hat{c}_d \left(\bar{S} \cup T\right) \leq \hat{c}_d(\bar{S}) + \hat{c}_d(T)$.

Mais si $\hat{c}_d$ est monotone, alors $\hat{c}_d(\bar{S}) \leq \hat{c}_d (S)$, de sorte finalement

$$\hat{c}_d (S \cup T) \leq \hat{c}_d (S) + \hat{c}_d (T) ;$$

c) la non-trivialité de c implique celle de $\hat{c}_d$. Supposons d'abord que $\hat{c}_d (N) = 0$. Puisque $c(N) > 0$ et $d_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n$, alors $\hat{c}_d (N) = 0$ implique que $\sum\limits_{i \in N} d_i = c(N) > 0$. Puisque c est non-triviale, $c(N) < \sum\limits_{i \in N} c(\{i\})$ et donc $\sum\limits_{i \in N} \hat{c}_d (\{i\}) = \sum\limits_{i \in N} c(\{i\}) - \sum\limits_{i \in N} d_i = \sum\limits_{i \in N} c(\{i\}) - c(N) > 0$, de sorte qu'il existe un joueur j pour lequel $\hat{c}_d (\{j\}) > 0$. La monotonicité de $\hat{c}_d$, implique alors que $\hat{c}_d(N) \geq \hat{c}_d (\{j\}) > 0$, d'où une contradiction. Si maintenant $\hat{c}_d(N) > 0$, puisque $c(N) < \sum\limits_{i \in N} c(\{i\})$, alors $\hat{c}_d(N) = c(N) - \sum\limits_{i \in N} d_i < \sum\limits_{i \in N} (c(\{i\}) - d_i) = \sum\limits_{i \in N} \hat{c}_d (\{i\})$.

En général, un jeu admet plusieurs décompositions, autres que cell qui, prima facie, semble la plus naturelle, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 6 Soit trois projets dont les réalisations isolées ou coordonnées requièrent les types de dépenses suivantes :

– des dépenses en capital machine, les machines utilisées pour réaliser un projet ou un groupe de projets étant spécifiques à chaque projet ou groupe de projets ;
– des dépenses en deux types de travail, I et II ;
– des dépenses en deux types de matières premières, A et B.

Ces dépenses sont présentées dans le Tableau 2, la fonction de coût total étant monotone, sous-additive et non triviale.

Les dépenses en matières premières ne dépendent pas du fait que les projets sont réalisés isolément ou en groupe. Elles constituent donc indiscutablement des dépenses spécifiques. Pour les autres dépenses, aucune n'apparaît comme naturellement spécifique à un projet.

Projets ou groupes de projets	Machines	Travail		Matières premières		Total
		type I	type II	type A	type B	
$\{1\}$	200	20	30	25	25	300
$\{2\}$	220	45	55	50	30	400
$\{3\}$	250	55	45	100	50	500
$\{1,2\}$	240	60	70	75	55	500
$\{1,3\}$	370	55	75	125	75	700
$\{2,3\}$	390	85	95	150	80	800
$\{1,2,3\}$	480	70	120	175	105	950

Tableau 2 – Structure des coûts des projets et des groupes de projets de l'exemple 5

Pour un vecteur d correspondant aux dépenses en matière première, i.e. $d_1 = 50$, $d_2 = 80$ et $d_3 = 150$, la fonction de coûts $\hat{c}_d$ prend les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} \hat{c}_d(\{1\}) &= 250,\ \ \hat{c}_d(\{2\}) = 320,\ \hat{c}_d(\{3\}) = 350 \\ \hat{c}_d(\{1,2\}) &= 370,\ \ \hat{c}_d(\{1,3\}) = 500,\ \hat{c}_d(\{2,3\}) = 570 \ \text{ et } \ \hat{c}_d(\{1,2,3\}) = 670. \end{aligned}$$

On vérifie aisément que cette fonction est monotone, de sorte que $(\hat{c}_d, N)$ est un jeu de coûts.

Il existe cependant d'autres décompositions que la décomposition naturelle $(d, \hat{c}_d)$ ci-dessus. Par exemple $d' \geq d$, de composantes $d'_1 = 60 > d_1$, $d'_2 = d_2 = 80$ et $d'_3 = d_3 = 150$, définit une autre décomposition $(d', \hat{c}_{d'})$.

Appelons *décomposition maximale* du jeu (c, N) toute décomposition $(d^+, \hat{c}_{d^+})$ telle que, pour toute décomposition $(d, \hat{c}_d)$:

$$\exists i \in N : d_i > d_i^+ \Rightarrow \exists j \in N, j \neq i : d_j < d_j^+,$$

et appelons *décomposition maximale pour le joueur* i, toute décomposition $(d^i, \hat{c}_{d^i})$ telle que pour toute autre décomposition $(d, \hat{c}_d) : d_i \leq d_i^i$.

Il est clair qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une décomposition $(d^i, \hat{c}_{d^i})$ soit une décomposition maximale pour le joueur i est que :

$$d_i^i = \min_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \{c(S \cup \{i\}) - c(S)_a\}, \min \{c(SU\{i\} - c(S)\},$$

sous les contraintes :

$$0 \leq d_j^i \leq c(S \cup \{j\}) - c(S),\ \ S \subseteq N \setminus \{i\},\ j \neq i.$$

En effet, on a vu plus haut qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $(d^i, \hat{c}_{d^i})$ soit une décomposition est que $\hat{c}_{d^i}$ soit monotone, i.e. :

$$\hat{c}_{d^i}(S \cup \{h\}) - \hat{c}_{d^i}(S) = c(S \cup \{h\}) - c(S) - d_h^i \geq 0,\ S \subseteq N \backslash \{h\},\ h \in N.$$

La valeur de d_i^i est alors la valeur maximale de d_i compatible avec le respect de ces contraintes pour $h \neq i$.

Pour tout $i \in N$ et tout $S \subseteq N \backslash \{i\}$, convenons de noter $\Delta(i, S)$ le coût incrémental d'adjonction de i à S :

$$\Delta(i, S) = c(S \cup \{i\}) - c(S).$$

Soit $\Delta_{\min}(i)$ le plus petit coût incrémental de i :

$$\Delta_{\min}(i) = \min_{S \subseteq N \backslash \{i\}} \Delta(i, S).$$

Alors le vecteur d^+ de composantes $d_i^+ = \Delta_{\min}(i)$, $i \in N$, définit l'unique décomposition maximale du jeu. En effet, pour ce vecteur de coûts spécifiques toutes les conditions qui garantissent la monotonicité de $\hat{c}_{d^+}$ sont satisfaites et pour tout $i \in N$, d_i^+ est la plus grande valeur de d_i compatible avec le respect des conditions qui font intervenir le joueur i.

On remarquera que pour les jeux concaves, dans lesquels le coût incrémental d'adjonction de tout joueur à une coalition décroit avec la taille de la coalition, le coût spécifique attribuable à un joueur dans la décomposition maximale est son coût incrémental d'adjonction à la coalition de tous les autres joueurs :

$$\forall i \in N : d_i^+ = \Delta_{\min}(i) = \Delta(i, N \backslash \{i\}).$$

De plus, le jeu réduit $(\hat{c}_{d^+}, N)$ est lui-même un jeu concave.

Il est clair que le jeu $\left(c^\lambda, N\right)$ obtenu par multiplication du jeu (c, N) par un réel positif λ admet comme décompositions les multiplications par ce même λ des décompositions du jeu (c, N), i.e. si $(d, \hat{c}_d)$ est une décomposition de (c, N) alors $(\lambda d, \hat{c}_d^{(\lambda)})$ est une décomposition de $\left(c^{(\lambda)}, N\right)$.

Enfin si $c^1, .., c^g, .., c^m$ sont les fonctions de coûts de m jeux joués par le même ensemble de joueurs N, alors :

a) la somme, $c = \sum_{g=1}^{m} c^g$, admet comme décomposition toute somme de décompositions $\left(d^1, \hat{c}^1_{d^1}\right), .., \left(d^g, \hat{c}^g_{d^g}\right), .., \left(d^m, \hat{c}^m_{d^m}\right)$ des jeux en question, i.e. $(d, \hat{c}_d)$ où $d = \sum_{g=1}^{m} d^g$ et $\hat{c}_d = \sum_{g=1}^{m} \hat{c}^g_{d^g}$, est une décomposition de (c, N) ;

b) toute combinaison linéaire convexe $c = \sum_{g=1}^{m} \alpha^g c^g, \alpha^g \geq 0, g = 1, .., m$ et $\sum_{g=1}^{m} \alpha^g = 1$, admet comme décomposition la même combinaison linéaire convexe de toutes décompositions des jeux (c^g, N) $, g = 1, .., m$, i.e. $(d, \hat{c}_d)$ ou $d = \sum_{g=1}^{m} \alpha^g d_g$ et $\hat{c}_d = \sum_{g=1}^{m} \alpha^g \hat{c}^g_{d^g}$, est une décomposition de (c, N).

Décomposition en éléments de coûts Considérons trois villes A,B et C qui veulent se raccorder à un réseau de fibre optique. L'implantation du tronc principal et des villes est représentée à la Figure 4, les points R_1 et R_2 étant les points de raccord au tronc principal. Une ville qui se raccorde seule doit subir un coût de pose de la ligne proportionnel à la distance qui la sépare du tronc principal. Mais il est clair que si les trois villes réalisent en commun leurs projets, en supposant $BC < R_2C$, le mieux est de construire une ligne R_1ABC. Le tronçon R_1A servira aux trois villes, le tronçon AB aux deux villes B et C et enfin le tronçon BC à la seule ville C.

Si chaque ville se raccorde séparément au tronc commun, la ville A doit poser une ligne de coût proportionnel à R_1A, la ville B une ligne de coût proportionnel à $R_1B = R_1A + AB$ et la ville C une ligne de coût R_2C. Il est clair que dans cet exemple il existe des éléments de coûts, les coûts des différents tronçons de lignes, tels que le coût de tout sous-ensemble de projets réalisés en commun, est la somme de certains de ces éléments. La décomposition en éléments de coûts essaie de séparer au mieux certains coûts joints en composantes qui doivent être répliquées lorsque l'ensemble des projets n'est pas réalisé de façon coordonnée.

Soit un jeu (c, N). On appelle *décomposition en éléments de coûts* de ce jeu, tout couple $(m, \tilde{c})$, $m \in \mathbb{N}_+$ et $\tilde{c} = (\tilde{c}^1, ..., \tilde{c}^g, ..., \tilde{c}^m)$, $\in \mathbb{R}^m_{++}$, tel qu'à tout g est associé un sous-ensemble

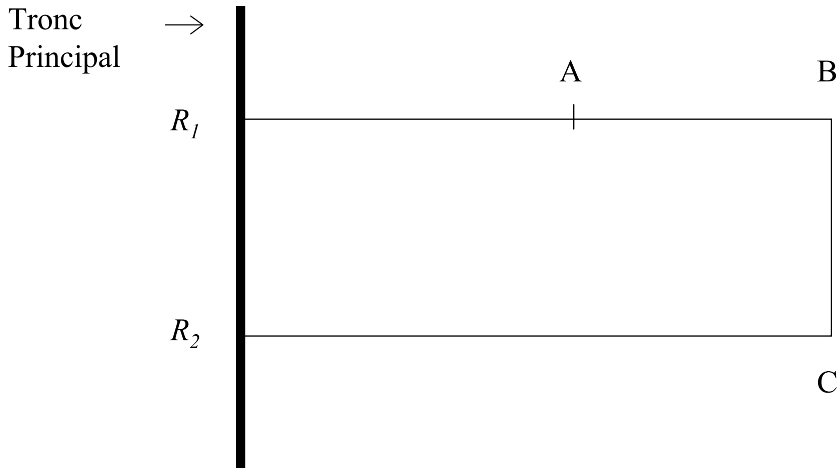

Figure 4 – Un réseau de fibres optiques

de projets $\tilde{N}(g) \subseteq \mathcal{N} \backslash \phi$, et pour toute coalition $S \in \mathcal{N} \backslash \phi$, le coût $c(S)$ peut s'écrire sous la forme :

$$c(S) = \sum_{g: S \cap \tilde{N}(g) \neq \phi} \tilde{c}^g$$

Si le jeu (c, N) admet une décomposition $(d, \hat{c})$ en coûts spécifiques d et coûts joints $\hat{c}_d$, l'intérêt de la décomposition en éléments de coûts ne concerne que les coûts joints. À tout coût spécifique $d_i, i \in N$, correspond un seul élément de coût, auquel on peut convenir d'attribuer l'indice i, et l'on a : $\tilde{c}^i = d_i$ et $\tilde{N}(i) = \{i\}$.

3 Concepts de pré-solution et de solution

Puisque les joueurs ont intérêt à coopérer, ils devraient le faire. Le problème est alors de répartir entre eux le coût global $c(N)$ de réalisation coordonnée de l'ensemble des projets. On appelle solution du jeu toute méthode de répartition de ce coût global. Une méthode de répartition peut soit sélectionner une répartition particulière du coût $c(N)$ soit, plus modestement, restreindre l'ensemble des répartitions à priori envisageables.

Pour tout jeu (c, N) on appelle *pré-imputation* du coût global de l'ensemble des projets toute ventilation de ce coût entre les joueurs, c'est-à-dire tout vecteur $x = (x_1 \ldots, x_i, \ldots, x_n)$, $x_i \geq 0$ pour tout i, tel que $\sum\limits_{i \in N} x_i = c(N)$. On note $PX(c, N)$ l'ensemble des pré-imputations et $\overline{PX}(c, N)$ l'ensemble $PX(c, N) \cup \phi$. On appelle *imputation* toute pré-imputation n'exigeant d'aucun agent une somme supérieure à celle qu'il devrait débourser s'il réalisait seul son projet : $x_i \leq c(\{i\})$ pour tout $i \in N$, c'est-à-dire toute pré-imputation *individuellement rationnelle*. On note $X(c, N)$ l'ensemble des imputations et $\overline{X}(c, N)$ l'ensemble $X(c, N) \cup \phi$. Sur la Figure 5, on a représenté les imputations et pré-imputations d'un jeu à deux joueurs.

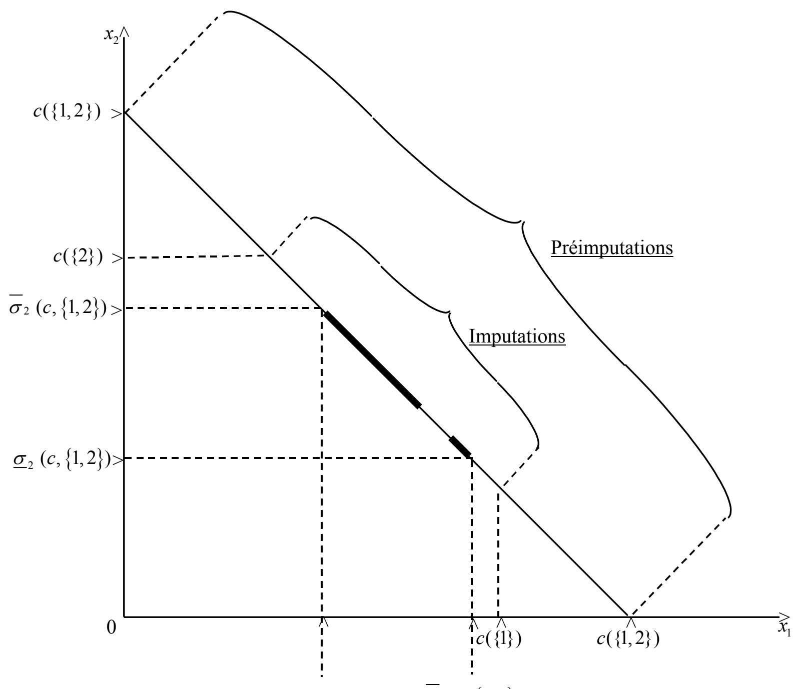

Figure 5 – Imputations et pré-imputations

Un exemple de méthode de répartition des coûts qui définit des pré-imputations, mais pas des imputations, est la méthode qui consiste à répartir le coût global $c(N)$ de façon égale entre tous les joueurs :

$$x_i = c(N)/n, i = 1, \ldots, n$$

Considérons par exemple le jeu à deux joueurs suivant :

$$c(\{1\}) = 5, c(\{2\}) = 7, c(\{1,2\}) = 11$$

On a $x_1 = x_2 = 5.5 > c(\{1\})$, de sorte que la pré-imputation $x = (x_1, x_2)$ n'est pas individuellement rationnelle.

On appelle *solution (pré-solution)* tout application σ qui à tout jeu (c, N) fait correspondre un ensemble d'imputations $\sigma(c, N) \subseteq \bar{X}(c, N)$ (respectivement un ensemble de pré-imputations $\sigma(c, N) \subseteq \overline{PX}(c, N)$).

Dans cette définition le fait que $\sigma(c, N)$ puisse prendre la valeur ϕ signifie que la méthode de partage des coûts sous examen est inapplicable, c'est-à-dire détermine un ou des vecteurs extérieurs à $X(c, N)$. Soit par exemple la méthode qui consisterait à faire payer deux millions de dollars au porteur du projet 1 et rien aux autres. Il est clair que cette méthode ne définit un partage du coût global que si $c(N)$ est égal à deux millions de dollars. Donc pour tout jeu (c, N) tel que $c(N) \neq 2 \cdot 10^6$ on aura $\sigma(c, N) = \phi$. Cette méthode ne brille évidemment pas par sa sophistication. Mais le problème est, comme on le montrera plus loin, que pour certaines méthodes qui, contrairement à celle-ci, présentent à priori beaucoup d'attrait, $\sigma(c, N) = \phi$ pour certains jeux.

On dira qu'une solution (pré-solution) est *effective pour le jeu* (c, N) si $\sigma(c, N) \neq \phi$, *effective pour une classe de jeux* Γ, si pour tout $(c, N) \in \Gamma$, $\sigma(c, N) \neq \phi$. On dira enfin qu'une solution (pré-solution) est *effective* si elle est effective pour tout jeu.

Pour tout jeu (c, N) et toute solution effective pour ce jeu, on définit $\underline{\sigma}_i(c, N)$ et $\overline{\sigma}_i(c, N)$ comme respectivement la plus petite et la plus grande contribution demandée au joueur i :

$$\underline{\sigma}_i(c, N) = \inf\{x_i | x \in \sigma(c, N)\} \text{ et } \overline{\sigma}_i(c, N) = \sup\{x_i | x \in \sigma(c, N)\}$$

Sur la Figure 5, on a représenté en trait gras l'ensemble des imputations sélectionnés par une hypothétique solution $\sigma(c, N)$ d'un jeu à deux joueurs. On remarquera que, pour cette solution, toutes les combinaisons linéaires convexes de $\underline{\sigma}_i(c, N)$ et $\overline{\sigma}_i(c, N)$ n'apparaissent pas dans l'ensemble des solutions.

Mathématiquement, une solution σ peut être vue comme une famille d'applications $\{\sigma^n, n \in \mathbb{N}_{++}\}$ telle que, pour tout n, $\sigma^n : \mathbb{C}_N \rightarrow \mathbb{R}_+^n \cup \phi$, et pour tout $c \in \mathbb{C}_N$, $\sigma^n(c) \subseteq \overline{X}(c, N)$. Les notations $\sigma^n(c)$ et $\sigma(c, N)$ sont équivalentes.

4 Propriétés exigibles des solutions

Une solution ou une pré-solution peut vérifier ou non certaines propriétés. Les unes sont relatives à la façon dont les joueurs sont traités, d'autres essayent de traduire certains éléments de la négociation qui s'instaure entre les partenaires lors de la discussion sur la répartition des charges, d'autres enfin posent des restrictions sur la façon dont l'ensemble solution devrait se modifier lorsque la structure des coûts change. Il n'est pas toujours facile, ni même possible, d'isoler ces différents aspects dans une situation du type de celle envisagée tant les intérêts des joueurs peuvent être imbriqués.

Comme on le verra plus loin, requérir certaines propriétés peut restreindre de façon drastique l'ensemble des imputations et à la limite définir une seule et unique méthode de partage. Mais un ensemble de propriétés qui, chacune, sembleraient désirables, peuvent aussi s'avérer incompatibles de sorte qu'aucune méthode n'existe qui, pour une certaine classe de jeux, les satisferait toutes. Nous présentons dans cette section les propriétés les plus souvent exigées. L'un des objectifs de cette revue est aussi de montrer qu'une intuition admet généralement plusieurs formulations qui ne sont pas toutes nécessairement équivalentes.

4.1 Traitement symétrique des projets équivalents et anonymat

Une première propriété que l'on pourrait exiger d'une solution est qu'elle ne traite pas arbitrairement les joueurs.

4.1.1 Traitement identique et traitement symétrique de projets équivalents

Une première acception de cette condition de non-discrimination consiste à exiger d'une solution que les agents porteurs de projets équivalents doivent contribuer de la même façon au financement du coût global $c(N)$. Puisque l'intérêt d'une approche par la théorie des jeux coopératifs est de mettre l'accent sur la façon dont les projets peuvent se combiner de multiples façons pour réduire les coûts, des projets ne devraient être déclarés équivalents que s'ils ont les mêmes conséquences en termes de coûts lorsqu'on les adjoint ou retranche de tout sous-ensemble de projets.

Convenons de dire qu'un projet i est *plus coûteux* qu'un projet j si pour toute coalitions ne comprenant ni i,ni j, l'adjonction de i à cette coalition implique un acrroissement de coût supérieur à celui qu'implique l'adjonction de j :

$$\forall S \subseteq N \backslash \{i, j\} : \Delta(i, S) \geq \Delta(j, S).$$

Une solution σ est *équitable* si pour tout $x \in \sigma(c, N)$ et pour tout couple de projets $\{i, j\}$, i, est plus coûteux que j, ou $x : x_i \geq x_j$.

Deux projets sont dits *équivalents* s'ils sont aussi coûteux l'un que l'autre :

$$\forall S \subseteq N \backslash \{i, j\} : \Delta(i, S) = \Delta(j, S).$$

Un ensemble de projets équivalents est alors un ensemble de projets dont chaque élément est équivalent à chaque autre. Il est maximal si tout projet extérieur à l'ensemble n'est pas équivalent aux projets de l'ensemble.[19]

On notera que si E est un ensemble de projets équivalents, alors :

$$\forall S \in \mathcal{N}, \forall i \in S \cap E, \forall j \in \{\{N \backslash S\} \cap E\} : \ c(\{S \backslash \{i\}\} \cup \{j\}) = c(S)$$

$$\forall S \in \mathcal{N}, \forall i, j \in S \cap E : \ c(S \backslash \{i\}) = c(S \backslash \{j\})$$

La première condition énonce que si un groupe de projets S comprend certains projets de E mais pas tous, en sortant de S un projet i qui appartient aussi à E pour lui substituer un autre projet j de E qui n'appartient pas à S, le coût ne change pas. La seconde condition

[19]On remarquera que pour tout ensemble de projets équivalents E , la restriction de c à E définit un jeu symétrique. Réciproquement, dans un jeu symétrique (c, N) , le seul ensemble maximal de projets équivalents est l'ensemble N lui-même.

enfin requiert que pour tout groupe de projets S comprenant plusieurs projets de E, le retrait du groupe S de l'un quelconque des projets qui sont aussi des projets de E a pour conséquence une baisse de coût qui est indépendante du projet i ou j retiré. L'ensemble de ces conditions implique que pour tout ensemble de projets S, l'adjonction à cet ensemble de m projets de E a les mêmes conséquences en termes d'accroissement du coût quels que soient les m projets en question : ce qui importe c'est le nombre m des projets que l'on adjoint à S, et symétriquement pour les retraits.

Toute solution équitable σ *traite de façon identique les projets équivalents*, i.e. pour tout ensemble de projets équivalents E, ou a :

$$\forall x \in \sigma\left(c, N\right), \forall i, j \in E : x_i = xj.$$

Pour les solutions qui sélectionnent un sous-ensemble d'imputations des conceptions moins éxigentes de l'équité pourraient être les suivantes.

Une solution σ sera dite *faiblement équitable* si pour tout couple de projets $\{i, j\}$, i plus coûteux de j, alors :

$$\bar{\sigma}_i(c, N) \geq \bar{\sigma}_j(c, N) \qquad \text{et} \qquad \bar{\sigma}_i(c, N) \geq \bar{\sigma}_j(c, N).$$

Cette condition implique que si les projets i et j sont équivalents, alors :

$$\bar{\sigma}_i(c, N) = \bar{\sigma}_j(c, N) \qquad \text{et} \qquad \bar{\sigma}_i(c, N) = \bar{\sigma}_j(c, N).$$

Une solution faiblement équitable σ sera réputée *traiter symétriquement les projets équivalents,* si pour tout jeu (c, N) pour lequel elle est effective, et dans ce jeu pour tout ensemble maximal de projets équivalents E, lorsqu'il existe une imputation $x \in \sigma\left(c, N\right)$ telle que $x_i \neq x_j$, $i, j \in E$, alors il existe aussi une imputation $x' \in \sigma\left(c, N\right)$ telle que $x'_i = x_j$ et $x'_j = x_i$.

On remarquera que les conditions de traitement identique et de traitement symétrique imposent toutes deux que, pour une solution monovaluée, si $x = \sigma\left(c, N\right)$ et $i, j \in E$ alors $x_i = x_j$, c'est-à-dire la condition posée au début du paragraphe.

4.1.2 Anonymat

Une autre acception de la non-discrimination est que les projets ne soient pas traités différemment du seul fait de leur nom. Cette conception impose que si deux jeux se déduisent l'un de l'autre par simple permutation des indices des joueurs, alors toutes les imputations de la solution de l'un se déduisent des imputations de la solution de l'autre par la même permutation des indices des joueurs.

Formellement soit (c, N) et (c', N) deux jeux tels qu'il existe une permutation π des indices de N pour laquelle :

$$\forall S \in \mathcal{N} : c'(S) = c(\pi(S)),$$

où, pour tout $S \in \mathcal{N}$, $\pi(S)$ désigne la coalition $\{\pi(i), i \in S\}$. On dit qu'une solution σ est *anonyme* si premièrement elle est effective pour (c', N) lorsqu'elle est effective pour (c, N) et si, deuxièmement, à toute imputation $x' \in \sigma(c', N)$ on peut faire correspondre une imputation $x \in \sigma(c, N)$ telle que pour tout $i \in N : x'_i = x_{\pi(i)}$.

On notera que cette définition implique que, réciproquement pour toute imputation $x \in \sigma(c, N)$, il existe une imputation $x' \in \sigma(c', N)$ telle que, pour tout $i \in N$, $x_i = x'_{\pi^{-1}(i)}$ puisqu'évidemment (c', N) se déduit de (c, N) par la permutation inverse π^{-1}.

Elle implique aussi que, pour toute solution monovaluée, les porteurs de projets équivalents soient traités identiquement.

Un exemple de solution qui satisferait la propriété d'anonymat est la procédure de partage du coût $c(N)$ de façon égale entre tous les joueurs[20] :

$$x_i = c(N)/n, \quad i = 1, \ldots, n$$

4.2 Insensibilité à l'élimination des joueurs négligeables

Supposons qu'un projet ne coûte rien si on le réalise seul et ne fait encourir aucun surcoût à tout groupe quelconque de projets auquel on pourrait l'adjoindre. Le bon sens et l'équité

[20] On a vu plus haut que cette méthode, dans certains jeux, sélectionne une pré-imputation puisque la condition de rationalité individuelle peut ne pas être satisfaite.

suggèrent qu'on ne devrait demander aucune contribution au porteur du projet en question, et que sa présence ou son absence ne devrait avoir aucune incidence sur les contributions demandées aux autres joueurs. À la réflexion le fait que le surcoût soit nul n'est pas la caractéristique essentielle de la situation. Ce qui importe c'est que l'accroissement de coût soit constant et égal au coût de réalisation isolée du projet. On devrait alors demander cette constante au joueur concerné qui devrait de toute façon supporter cette dépense s'il réalisait seul son projet et dont le seul rôle dans toute coalition à laquelle il adhère, est de gonfler le coût de réalisation coordonnée de cette même constante. Ce projet est un projet sans importance pour les autres joueurs.

Pour tout jeu (c, N) on dit que le projet i est *négligeable* si :

$$\forall S \subseteq N \backslash \{i\} : c(S \cup \{i\}) - c(S) = c(\{i\}) .$$

On notera que si un joueur i est négligeable alors le jeu admet une décomposition $(d^i, \hat{c}_{d^i})$ maximale pour ce joueur, décomposition dans laquelle d^i a la structure suivante : $d^i_i = c(\{i\})$ et $d^i_j = 0$, $j \neq i$. Considérons alors le jeu à $n-1$ joueurs $(\tilde{c}, N \backslash \{i\})$ dans lequel :

$$\forall S \subseteq N \backslash \{i\} : \tilde{c}(S) = \hat{c}_{d^i}(S).$$

On dira que la solution σ est insensible à l'élimination des joueurs négligeables si :[21]

$$\forall x \in \sigma(c, N),\ \exists x' \in \sigma(\tilde{c}, N \backslash \{i\}) : x_j = x'_j, \quad j \in N \backslash \{i\}$$

et réciproquement :

$$\forall x' \in \sigma(\tilde{c}, N \backslash \{i\}),\ \exists x \in \sigma(c, N) : x'_j = x_j, \quad j \in N \backslash \{i\} .$$

Il est clair que si ces conditions sont remplies, alors pour tout joueur i négligeable, on doit avoir :

$$\forall x \in \sigma(c, N) :\ x_i = c(\{i\}).$$

[21] Pour simplifier, on doit comprendre que, dans les deux expressions ci-dessous, $x \epsilon \mathbb{R}^n_+$ et $x' \epsilon \mathbb{R}^{n-1}_+$.

4.3 Additivité et super-additivité

On dit qu'une solution est *additive* si pour toute paire de jeux (c', N) et (c'', N) pour lesquels cette solution est effective, elle est également effective pour le jeu $c = c' + c''$ d'une part, et d'autre part :

$$x' \in \sigma(c', N) \text{ et } x'' \in \sigma(c'', N) \Rightarrow x = x' + x'' \in \sigma(c, N),$$

et si, réciproquement :

$$x \in \sigma(c, N) \Rightarrow \exists x' \in \sigma(c', N) \text{ et } \exists x'' \in \sigma(c'', N) : x' + x'' = x.$$

Considérée isolément cette propriété n'exclut pas certains modes de partage des coûts peu plausibles ou barbares. Soit la méthode consistant à faire supporter au seul joueur $i = 1$ la totalité du coût de l'ensemble des projets, $c(N)$.[22] Assez évidemment cette méthode est additive. On doit remarquer cependant qu'elle ne néglige pas les joueurs négligeables. En effet dans un jeu à deux agents dont la fonction de coûts est la suivante :

$$c(\{1\}) = 0\ ,\ c(\{2\}) = 2 \text{ et } c(\{1,2\}) = 2,$$

la méthode en question impute au joueur 1 une charge égale à 2. La seule méthode négligeant les joueurs négligeables dans ce jeu simpliste devrait mettre à la charge du joueur 1 un montant de 0 et à celle du joeur 2, un montant de 2.

Une propriété voisine est la propriété de super-additivité. On dit qu'une solution σ est *super-additive* si pour tous jeux $(c', N), (c'', N)$ et (c, N), tels que $c = c' + c''$, et pour lesquels cette solution est effective, on a :[23]

$$\sigma(c', N) + \sigma(c'', N) \subseteq \sigma(c, N).$$

Pour les solutions qui sélectionnent une seule imputation, la super-additivité se ramène à l'additivité.

[22] En tout état de cause, il ne peut s'agir que d'une présolution puisque la condition de rationalité individuelle n'est pas respectée.

[23] Étant donnés deux sous-ensembles X et Y de $\mathbb{R}^n$, on appelle somme de X et Y le sous-ensemble, noté $X + Y$, défini par $X + Y = \{z | z = x + y,\ x \in X \text{ et } y \in Y\}$.

4.4 Invariance à la décomposition en coûts directs et co ûts joints

Une solution σ est dite invariante à la décomposition en coûts directs et coûts joints si pour tout jeu (c, N) admettant une telle décomposition $(d, \hat{c}_d)$:

$$\forall x \in \sigma(c, N),\ \ \exists \hat{x}_d \in \sigma\left(\hat{c}_d, N\right):\ \ x = \hat{x}_d + d,$$

et réciproquement :

$$\forall \hat{x}_d \in \sigma(\hat{c}_d, N),\ \exists x \in \sigma(c, N) : \hat{x}_d = x - d.$$

Si on admettait d'affaiblir la condition de non trivialité et d'appeler jeu les situations dans lesquelles $c(N) = \sum_{i \in N} c(\{i\})$, cette propriété d'invariance serait une simple conséquence de l'additivité. On pourrait voir alors le jeu (c, N) comme la somme du jeu $(\hat{c}_d, N)$ et d'un jeu (c', N) défini par :

$$c'(\phi) = 0 \ \text{ et } \quad \forall S \in \mathcal{N} \backslash \phi : c'(S) = \sum_{i \in s} d_i.$$

Cette propriété d'invariance peut être vue également comme un cas particulier de la propriété suivante.

4.5 Traitement équivalent des jeux équivalents

On dit que deux jeux c et c' définis pour un même ensemble de joueurs N, sont *équivalents*[24] s'il existe un nombre positif α et des nombres β_i, $i = 1, \ldots, n$, tels que :

$$\forall S \in \mathcal{N} : c'\left(S\right) = \alpha c\left(S\right) + \sum_{i \in S} \beta_i.$$

Un exemple de jeux équivalents est la paire de jeux (c, N) et $(\hat{c}_d, N)$ où (c, N) admet une décomposition $(d, \hat{c}_d)$ en coûts spécifiques d et coûts joints $\hat{c}_d$. Il suffit, pour identifier, de poser dans la définition précédente $\alpha = 1$, et, $\beta_i = d_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$.

[24] Stricto sensu «stratégiquement équivalents». Pour les raisons de ce qualificatif cf par exemple Owen (1995).

Une solution σ *traite de façon équivalente les jeux équivalents* si, pour toute paire de tels jeux, (c, N) et (c', N), on a :

$$\forall x, x' : \{x'_i = \alpha x_i + \beta_i,\ i = 1, \ldots, n\} \Rightarrow \{x \in \sigma(c, N) \Rightarrow x' \in \sigma(c', N)\}.$$

4.6 Égal partage du gain de la coopération

L'idée de «couper la poire en deux» est une idée qui peut sembler attrayante parce que simple. L'application de ce principe amène à définir la solution $\sigma(c, N)$ de tout jeu (c, N), comme suit :

$$\forall_i \in N : \sigma_i(c, N) = c(\{i\}) - \frac{1}{n}\left[\sum_{j \in N} c(\{j\}) - c(N)\right]$$

On remarquera que cette solution peut impliquer qu'un joueur soit subventionné, i.e. $x_i < 0$. Considérons un jeu à trois joueurs dont la fonction de coûts est donnée par :[25]

$$c(\{1\}) = 500\ ,\ c(\{2\}) = 1000,\ c(\{3\}) = 5000,\ \text{et},\ c(\{1, 2, 3\}) = 5200.$$

Un financement du coût global $c(N) = 5200$ par égal partage de la réduction du coût, conduit à demander aux joueurs les sommes suivantes, puisque $\frac{1}{3}[7000 - 5200] = 600$:

$$x_1 = 500 - 600 = -100,\ x_2 = 1500 - 600 = 900,\ \text{et},\ x_3 = 5000 - 600 = 4400.$$

Le joueur 1 doit donc être subventionné. Ce phénomène de subvention d'un joueur pour qu'il participe à la réalisation coordonnée des projets ne peut cependant pas se produire dans les jeux de coûts à deux joueurs qui vérifient les conditions (i) à (iv) posées à la sous-section 2.1. En effet, si $N = \{1, 2\}$ on doit avoir : $\forall i, j \in N,\ i \neq j$:

$$x_i = c(\{i\}) - \tfrac{1}{2}[c(\{i\}) + c(\{j\}) - c\{(1, 2)\}] = \tfrac{1}{2}c(\{i\}) + \tfrac{1}{2}c(\{1, 2\}) - c(\{j\})$$

Or sous la condition (ii) de monotonicité, on a

$$c(\{1, 2\}) - c(\{j\}) \geq 0, \forall j \in N$$

[25] On n'a pas besoin de spécifier la fonction pour les coalitions de deux joueurs.

d'où $x_i \geq 0,\ i \in N$.

Pour les jeux (c, N) qui admettent une décomposition $(d, \hat{c}_d)$ en coûts directs et coûts joints, ce mode de financement revient à partager le gain sur les coûts joints puisque c'est sur cette seule partie des coûts que se réalise le gain de la coopération. On a donc pour ces jeux :

$$\forall i \in N : x_i = d_i + \hat{c}_d(\{i\}) - \frac{1}{n}\left[\sum_{j \in N} \hat{c}_d(\{j\}) - \hat{c}(N)\right]$$

4.7 Monotonicité

Considérons deux jeux qui ne diffèrent que parce que dans l'un, les coûts associés à certaines coalitions sont plus élevés que dans l'autre. D'une certaine façon, la position des joueurs membres des coalitions concernées est plus faible dans le premier jeu que dans le second et donc la charge qu'on leur impute devrait être au moins aussi élevée.

Soit deux jeux (c, N) et (c', N) tels qu'il existe une famille de coalitions $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_g, \ldots, S_m\}$ pour laquelle :

$$\forall S \in \mathcal{N} : S \in \mathcal{S} \Rightarrow c(S) \geq c'(S) \quad \text{et} \quad S \notin \mathcal{S} \Rightarrow c(S) = c'(S)$$

La solution σ vérifie la propriété de *monotonicité par rapport aux coûts des coalitions* si, pour toute paire de jeux (c, N) et (c', N) satisfaisant les conditions ci-dessus, jeux pour lesquels cette solution est effective, on a :

$$\forall i \in \bigcup_{g=1}^{m} S_g : \underline{\sigma}_i(c, N) \geq \underline{\sigma}_i(c', N) \text{ et } \overline{\sigma}_i(c, N) \geq \overline{\sigma}_i(c', N)$$

Cette définition est équivalente à la définition suivante. Soit deux jeux (c, N) et (c', N), tels qu'il existe un sous-ensemble T de joueurs pour lequel :

$$\forall S \in \mathcal{N} : c(S) \geq c'(S) \text{ si } S \cap T \neq \phi \text{, et, } c(S) = c'(S) \text{ si } S \cap T = \phi,$$

alors :

$$\forall i \in T : \underline{\sigma}_i(c, N) \geq \underline{\sigma}_i(c', N) \text{, et, } \overline{\sigma}_i(c, N) \geq \overline{\sigma}_i(c', N).$$

On notera que la prémisse implique en particulier que $c(N) \geq c'(N)$.

Un exemple de règle de partage qui n'est pas monotone est la méthode de ventilation du coût global proportionnellement aux coûts de réalisation isolée des projets, c'est-à-dire la solution monovaluée définie par :

$$\forall (c, N), \ \forall i \in N : \sigma_i (c, N) = \frac{c(\{i\})}{\sum\limits_{j \in N} c(\{j\})} c(N)$$

Pour cette règle, on a :

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial c(S)} = \begin{cases} c(N) \sum\limits_{j \neq i} c(\{j\}) / \sum\limits_{j \in N} (c(\{j\}))^2 > 0 & \text{si} \quad S = \{i\} \\ -c(N) c(\{i\}) / (\sum\limits_{j \in N} c(\{j\}))^2 < 0 & \text{si} \quad S = \{h\} \ \text{ et } h \neq i \\ 0 & \text{si} \quad \forall S : 1 < |S| < n \\ c(\{i\}) / \sum\limits_{j \in N} c(\{j\}) \geq 0 & \text{si} \quad S = N \end{cases}$$

La condition de monotonicité est donc violée puisque tout joueur i peut voir sa contribution diminuer alors même que les coûts de toutes les coalitions d'au moins deux joueurs auxquelles il appartient, à l'exception du coût de la grande coalition, augmentent, tous les autres coûts restant constants à l'exception du seul coût de réalisation d'un projet $h \neq i$ qui augmente.

4.8 Prise en compte des coûts incrémentaux des coalitions

Étant donné un jeu (c, N) et une coalition S quelconque, on peut toujours considérer le coût de réalisation de l'ensemble des projets $c(N)$ comme le coût qu'implique la réalisation des projets de la coalition complémentaire $N \backslash S$, $c(N \backslash S)$ auquel il faut ajouter un accroissement $\delta(S) = c(N) - c(N \backslash S)$ dû à l'adjonction des projets de la coalition S. On convient en général d'appeler *coût incrémental de la coalition* S cet accroissement de coût $\delta(S)$. Puisque la coalition S est «responsable» d'un accroissement du coût de $\delta(S)$ la somme des contributions qui sont demandées à chacun de ses membres devrait au moins couvrir cet accroissement du coût, ou coût incrémental.

On dit qu'une solution σ *tient compte des coûts incrémentaux* si pour tout jeu (c, N) pour lequel cette solution est effective, on a :

$$\forall S \in \mathcal{N} : x \in \sigma(c, N) \Rightarrow \sum_{i \in S} x_i \geq \delta(S).$$

4.9 Robustesse aux menaces de retrait coordonné ou de sécession

Partons de l'hypothèse que les porteurs de projets sont libres de se coordonner avec qui ils veulent. Cette liberté de contracter implique que toute coalition d'agents S pourrait décider de ne pas participer à un plan de réalisation coordonnée de l'ensemble des projets, le plus économique pour tous, si la partie du coût global qu'on lui demande de supporter est trop importante, en l'espèce supérieure au coût $c(S)$ qu'elle devrait assumer en se retirant et en réalisant seule les projets de ses membres. On dit qu'une solution σ est *robuste* ou *résiste aux menaces de retraits coordonnées* ou de *sessesions* si pour tout jeu (c, N) pour lequel elle est effective, on a :

$$\forall S \in \mathcal{N} : x \in \sigma(c, N) \Rightarrow \sum_{i \in S} x_i \leq c(S).$$

Cette même idée est parfois présentée de la façon équivalente suivante. On dit qu'une imputation x *domine l'imputation* x' *via la coalition* S si :[26]

$$\forall i \in S : x_i < x'_i, \text{ et, } \sum_{i \in S} x_i \geq c(S).$$

On note xD_Sx' le fait que x domine x' via S. On dit qu'une imputation x domine une imputation x', ce qu'on note xDx', s'il existe une coalition S pour laquelle xD_Sx'. Une imputation x' est *dominée* s'il existe une imputation x qui la domine. Une imputation *non-dominée* est une imputation qui n'est dominée par aucune autre. Pour une telle imputation

[26] Une définition moins stricte, mais équivalente étant donné le type de jeu, imposerait :

$$\forall i \in S : x_i \leq x'_i, \exists j \in S : x_j < x'_j, \quad et, \quad \sum_{i \in S} x_i \geq c(S).$$

x, $\forall x' \in \overline{X}(c,N), x' \neq x, \forall S \in \mathcal{N}$, l'une au moins des deux inégalités suivantes est donc vraie :[27]

$$\text{soit} \quad \exists i \in S : x'_i \geq x_i$$

$$\text{soit} \quad \sum_{i \in S} x'_i < c(S)$$

Une solution σ est alors dite *robuste aux menaces de retraits ou de sécessions* si elle ne sélectionnne que des imputations non-dominées lorsqu'elle est effective.

Pour les jeux de coûts considérés dans ce mémoire, montrons que cette définition est équivalente à la définition donnée plus haut. Supposons d'abord qu'une imputation x soit robuste aux menaces de sécessions, i.e. robuste au sens de la première définition, mais non robuste au sens de la seconde, i.e. elle est dominée par une imputation x' via une coalition S'. On aurait alors :

a) puisque x est robuste au sens de la première définition, pour tout $S \in \mathcal{N}$, et donc en particulier pour S', on a :

$$\sum_{i \in S'} x_i \leq c(S')$$

b) puisque x est dominée par x' via S' :

$$\forall i \in S' : x'_i < x_i, \text{ et, } \sum_{i \in S'} x'_i \geq c(S').$$

Les deux premières inégalités impliquent que $\sum_{i \in S'} x'_i < c(S')$, inégalité qui contredit la troisième.

Considérons maintenant une imputation x qui ne serait pas robuste au sens de la première définition. Il existerait alors une coalition S' pour laquelle : $\sum_{i \in S'} x_i > c(S')$

[27] Avec l'autre définition de la domination, donnée dans la note précédente, une imputation x serait non-dominée si pour toute imputation $x' \neq x$ et toute coalition S l'une au moins des inégalités suivantes est satisfaite : soit $\exists i \in S : x'_i > x_i$, soit $\forall j \in S : x'_j \geq x_j$, soit enfin $\sum_{i \in S} x'_i < c(S)$.

Posons $\alpha = \sum_{i \in S'} x_i - c(S')$, $\alpha > 0$. Soit $\beta = c(N) - c(S') - \sum_{i \notin S'} c(\{i\})$. Puisque la fonction c est sous-additive $c(S') + \sum_{i \notin S'} c\{i\} \geq c(N)$ de sorte que $\beta \leq 0$.[28] Considérons alors l'imputation x' dont les composantes sont définies comme suit :

$$\forall i \in N : x'_i = \begin{cases} x_i - \frac{\alpha}{|S'|} & \text{si } i \in S' \\ c(\{i\}) + \frac{\beta}{n - |S'|} & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrons d'abord que si x est une imputation alors x' en est une autre. D'abord le coût global $c(N)$ est bien réparti entre tous les agents :

$$\begin{aligned} c(N) &= \sum_{i \in N} x_i = \sum_{i \in S'} x_i + \sum_{i \notin S'} x_i = [c(S') + \alpha] + [c(N) - c(S') - \alpha] \\ &= c(S') + [c(N) - c(S')] = \sum_{i \in S'} x'_i + \sum_{i \notin S} x'_i \end{aligned}$$

Ensuite, la condition de rationalité individuelle est satisfaite. On a :

$$\begin{aligned} & x'_i < x_i \leq c(\{i\}), && \text{si} \quad i \in S' \\ & x'_i \geq c(\{i\}), && \text{si} \quad i \in S' \end{aligned}$$

Maintenant, remarquons que, pour l'imputation x', on a par construction $\sum_{i \in S'} x'_i = c(S')$ et, puisque $x'_i < x_i$ pour tout $i \in S'$, x' domine donc x via S'.

Pour les jeux de coûts étudiés ici, la robustesse aux menaces de retrait est équivalente au principe de prise en compte des coûts incrémentaux. Considérons d'abord une imputation x robuste aux menaces de retrait. Puisque x est une imputation, on a pour toute coalition S :

$$\sum_{i \in S} x_i = c(N) - \sum_{i \notin S} x_i$$

Puisque x est robuste à la menace de retrait de la coalition $N \backslash S$, on a aussi :

$$\sum_{i \notin S} x_i \leq c(N \backslash S)$$

inégalité qui, avec l'inégalité précédente, implique :

$$\sum_{i \in S} x_i \geq c(N) - c(N \backslash S) = \delta(S)$$

[28] On remarquera qu'on a besoin de la sous-additivité dans la démonstration.

L'imputation tient donc compte du coût incrémental de S.

Réciproquement supposons que x tienne compte des coûts incrémentaux. On a pour toute coalition $N\backslash S$, $S \in \mathcal{N}$:

$$\sum_{i \notin S} x_i \geq c(N) - c(N \backslash \{N \backslash S\}) = c(N) - c(S),$$

et, puisque x est une imputation, on a aussi :

$$\sum_{i \notin S} x_i = c(N) - \sum_{i \in S} x_i$$

égalité qui, avec l'inégalité précédente, implique que :

$$c(N) - \sum_{i \in S} x_i \geq c(N) - c(S) \Rightarrow \sum_{i \in S} x_i \leq c(S).$$

L'imputation x est donc robuste à toute menace de retrait.

4.10 Cohérence

Considérons un jeu (c, N) et une solution monovaluée σ, effective pour ce jeu. Soit x la pré-imputation sélectionnée par cette solution : $x = \sigma(c, N)$. Fixons une coalition $N\backslash T$ de joueurs. La coalition $N\backslash T$ doit participer aux charges pour un montant $\sum_{i \notin T} x_i$. On peut alors voir les agents de la coalition complémentaire T comme jouant un jeu de coût restreint dans lequel le coût global à supporter s'élève à $c(N) - \sum_{i \notin T} x_i = \sum_{i \in T} x_i$. Pour que la solution x soit cohérente, il faudrait que la solution de ce jeu restreint exige des agents concernés, i.e. des joueurs $i \in T$, précisément la somme x_i qui leur était initialement demandée.

Cependant, la spécification du jeu restreint aux seuls joueurs $i \in T$, sachant que l'ensemble des autres doit payer $\sum_{i \notin S} x_i$, n'est pas sans poser quelques problèmes. Globalement les agents $i \in T$ doivent payer $\sum_{i \in S} x_i$. Le coût de la grande coalition de ce jeu restreint est donc défini sans ambiguïté. Mais comment définir la réalisation des projets d'un sous-ensemble de joueurs $S \subset T$? Puisque les joueurs $i \in N\backslash T$ doivent de toute façon payer x_i, on peut, dans une première approche, poser que les joueurs de toute coalition $S \subset T$ peuvent faire appel à tout sous-ensemble U de joueurs de $N\backslash T$ pour réduire le coût net, $c(S \cup U) - \sum_{i \in U} x_i$, de réalisation de leurs projets. C'est cette idée que nous formalisons d'abord pour des concepts de solution qui ne sont pas nécessairement monovalués.

Soit x une pré-imputation du jeu (c, N) et $T \subset N$ un sous-ensemble strict de joueurs. On appelle *jeu réduit pour T en x, au sens de Davis et Maschler*,[29] le jeu dont la fonction de coût c_{Tx} est la suivante :

$$\forall S \subseteq T : c_{Tx}(S) = \begin{cases} \sum\limits_{i \in S} x_i & \text{si} \quad S = T \\ \min\limits_{U \subseteq N \backslash T} \left\{ c(S \cup U) - \sum\limits_{i \in U} x_i \mid U \subseteq N \backslash T \right\} & \text{si} \quad \phi \neq S \subset T \\ 0 & \text{si} \quad S = \phi \end{cases}$$

Remarquons que cette définition n'exclut pas que, pour deux coalitions disjointes S' et S'' dans T, les coalitions U' et U'' de $N \backslash T$ auxquelles S' et S'' font respectivement appel pour minimiser leurs coûts, n'aient pas de partie commune. Si $U' \cap U'' \neq \phi$ alors stricto sensu, on ne peut pas interpréter (c_{Tx}, T) comme un jeu de coûts. Il faut plutôt voir le jeu réduit (c_{Tx}, T) comme une méthode de répartition de la somme $\sum\limits_{i \in T} x_i$ entre les agents de la coalition T.

On dira qu'une solution σ effective pour le jeu (c, N) est *cohérente* si pour toute imputation $x \in \sigma(c, N)$ et toute coalition stricte $T \subset N$, $T \neq \phi$, alors, premièrement, cette solution est effective pour le jeu réduit (c_{Tx}, T) et, deuxièmement, la restriction de x à T appartient à $\sigma(c_{Tx}, T)$.

Un exemple de méthode qui satisfait cette condition est la règle de partage égalitaire du coût global qui sélectionne la pré-imputation $x_i = c(N)/n$ pour tout $i = 1, \ldots, n$.[30]

Diverses variantes de la condition de cohérence ont été proposées qui caractérisent certains types de solution présentés plus loin.

Le concept de *cohérence au sens faible* réduit l'ensemble des coalitions T via lesquelles le jeu est réduit aux coalitions de deux joueurs au plus.

Une autre variante, proposée par Hart et Mas-Colell (1989), part d'une définition différente du jeu réduit. Elle permettra de caractériser la valeur de Shapley, l'un des concepts de

[29] cf Davis et Maschler (1965).

[30] Rappelons que les charges que cette règle définit, peuvent violer la condition de rationalité individuelle.

solution les plus importants. Pour tout jeu (c, N), pour toute pré-imputation $x \in X(c, N)$ et, pour toute coalition stricte $T \subset N$, on appelle *jeu réduit au sens de Hart et Mas-Colell* le jeu $\left(c_{Tx}^{HM}, T\right)$ dans lequel :

$$\forall S \subseteq T : c_{Tx}^{HM}(S) = \begin{cases} \sum\limits_{i \in S} x_i & \text{si} \quad S = T \\ c(S \cup \{N \backslash T\}) - \sum\limits_{i \notin T} x_i & \text{si} \quad S \subset T \text{ et } S \neq \phi \\ 0 & \text{si} \quad S = \{\phi\} \end{cases}$$

La différence avec la définition donnée plus haut est qu'ici tous les membres du groupe complémentaire $N \backslash T$ sont censés se joindre à toute coalition $S \subseteq T$ pour réaliser ensemble leurs projets, alors que dans la définition précédente la coalition S optimise le groupe des projets de $N \backslash T$ qu'elle joint aux siens.

Une solution σ, effective pour le jeu (c, N), est *cohérente au sens de Hart et Mas-Collel* si pour toute imputation $x \in \sigma(c, N)$ et toute coalition stricte $T \subset N$, $T \neq \phi$, alors, d'une part, ce concept est effectif pour le jeu (c_{Tx}^{HM}, T) et, d'autre part, la restriction de x à T appartient à $\sigma(c_{Tx}^{HM}, T)$.

Il est clair que, quelle que soit la définition du jeu réduit, on peut requérir que la solution vérifie une propriété inverse de la propriété de cohérence, qui spécifierait des propriétés de stabilité lorsqu'on plonge un certain jeu dans un jeu plus vaste. Utilisons la première définition de la notion de jeu réduit. Soit (c, N) un jeu pour lequel une solution σ est effective et considérons une pré-imputation x, telle que, pour tout $T \subset N$, la solution en question est aussi effective pour le jeu (c_{Tx}, T). On dira que cette solution σ vérifie la propriété de *cohérence inverse* si l'imputation x appartient à $\sigma(c, N)$ lorsque, pour tout $U \subset N$, $U \neq \phi$, sa restriction à U est une des pré-imputations de $\sigma(c_{Ux}, U)$.

Appendice : Équivalence des conditions de définition des jeux concaves

On a vu dans le texte que la condition (b) implique la condition (a). Montrons que la condition (a) implique la condition (b).

Considérons deux coalitions Q et R telles que $Q \subseteq R$ et soit $U \subseteq N \backslash R$. Sur la figure qui suit, le grand rectangle est l'image de N et les différentes bandes verticales sont les images des sous-ensembles de N qu'indiquent les accolades correspondantes.

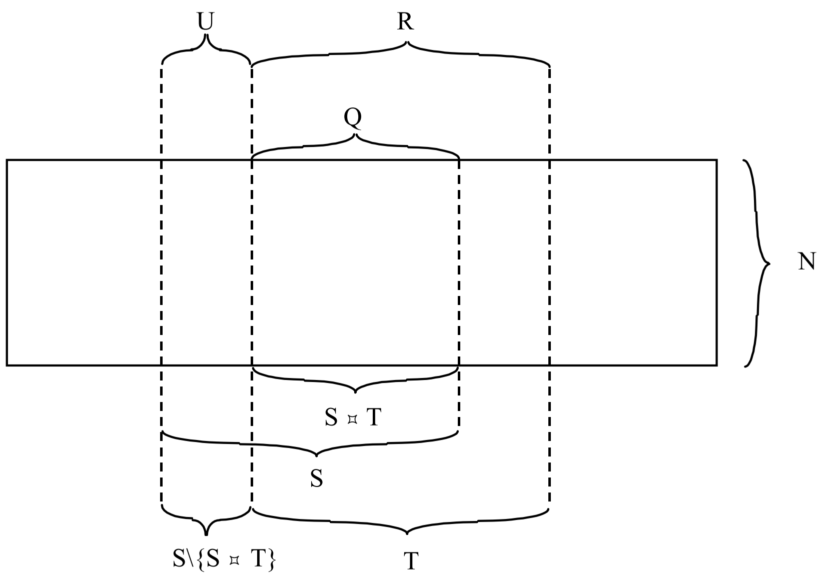

Figure 6 – Coalitions considérées dans la démonstration

Convenons d'indicer par $i = 1, \ldots, u$ les projets de l'ensemble U. Appliquons la relation (a) en adjoignant successivement aux ensembles Q et R les projets $1, \ldots, i, \ldots, u$. On obtient :

$$\begin{array}{rcl} c(Q \cup \{1\}) - c(Q)) & \geq & c(R \cup \{1\}) - c\,(R) \\ c(Q \cup \{1,2\}) - c(Q \cup \{1\}) & \geq & c(R \cup \{1,2\}) - c(R \cup \{1\} \\ & \vdots & \\ c(Q \cup \{1,\ldots,u\}) - c(Q \cup \{1,\ldots,u-1\}) & \geq & c(R \cup \{1,\ldots,u\}) - c(R \cup \{1,\ldots,u-1\}) \end{array}$$

Sommons ces inégalités. Il vient :

$$\forall U \subseteq N \backslash R : c\left(Q \cup U\right) - c\left(Q\right) \geq c\left(R \cup U\right) - c\left(R\right) \tag{A.1}$$

Considérons maintenant deux coalitions quelconques S et T. Alors de deux choses l'une :

– ou bien $S \cap T \neq \phi$ et alors le fait que S et T vérifient la condition (b) résulte simplement de la gratuité de l'inaction, $c(\phi) = 0$, et de la sous-additivité, $c(S) + c(T) \geq c(S \cup T)$;

– ou bien $S \cap T \neq \phi$ et dans ce cas posons d'une part que $Q = S \cap T$ et que $R = T$ de sorte que $Q \subseteq R$. En d'autres termes les hypothèses sous lesquelles la condition (a) s'applique à Q et R sont vérifiées. Définissons alors U comme le sous-ensemble de projets $S \backslash \{S \cap T\}$. Par construction $U \subseteq N \backslash R$ de sorte que la relation (A.1) ci-dessus doit être satisfaite si la condition (a) est elle-même satisfaite.

Explicitons (A.1) pour les coalitions ou groupes de projets que l'on vient de définir :

$$c\left(\{S \cap T\} \cup \{S \backslash \{S \cap T\}\}\right) - c\left\{S \cap T\right\} \geq c\left(T \cup \{S \backslash \{S \cap T\}\}\right) - c\left(T\right). \tag{A.2}$$

Remarquons que, par définition (se reporter à la figure 6) :

$$\{S \cap T\} \cup \{S \backslash \{S \cap T\}\} = S, \qquad \text{et} \qquad T \cup \{S \backslash \{S \cap T\}\} = S \cup T,$$

de sorte que (A.2) s'écrit encore :

$$c\left(S\right) - c\left(S \cap T\right) \geq c\left(S \cup T\right) - c\left(T\right),$$

c'est-à-dire :

$$c\left(S\right) + c\left(T\right) \geq c\left(S \cup T\right) + c\left(S \cap T\right). \tag{A.3}$$

Puisque S et T sont des groupes de projets quelconques, l'inégalité (A.3) n'est autre que la condition (b).

Références

Baumol, W.J., J.C. Panzar et R.D. Willig 1982. *Constestable Markets and the Industry Structure*, New-York : Harcourt Brace Jovanovich.

Davis, M. et M. Maschler 1965. "The Kernel of a Cooperative Game", *Naval Research Logistics Quarterly*, 12, 223-259.

Hart, S. et A. Mas-Colell 1989. "The Potential and the Shapley Value", in A.E. Roth, ed., *The Shapley Value. Essays in Honor of Lloyd S. Shapley*, Cambridge, U.K. : Cambridge University Press, 127-137.

Izquierdo, J.M. et C. Rafels 2001. "Average Monotonic Cooperative Game", *Games and Economic Behavior*, 36, 174-198.

Owen, G. 1995. *Game Theory*, third edition, San Diego, CA : Academic Press.

Shapley, L.S. 1953. "A Value for n-Person Games", in H.W.Kuhn et A.W. Tucker, eds, *Contributions to the Theory of Games, Vol. II,* Annals of Mathematics Studies N^o 28, Princeton, N.J. : Princeton, University Press.

Sharkey, W.W 1982. *The Theory of Natural Monopoly,* Cambridge : Cambridge University Press.

Young, H.P. 1994. "Cost Allocation", in R.J.Aumann et S. Hart, eds, *Handbook of Game Theory, Vol. II,* Amsterdam in North Holland, Chap. 34, 1191-1235.

Documents * CIRANO *
sur
Le partage des coûts communs et la tarification des infrastructures
http ://www.cirano.qc.ca/publications/

****

[1] 2002RP-17 Le partage des coûts communs : enjeux, problématique et pertinence

[2] 2002RP-18 Les méthodes de partage de coûts : un survol

[3] 2002RP-19 Les méthodes de partage de coûts : propriétés

[4] 2002RP-20 Les jeux de coûts : définitions et propriétés souhaitables des solutions

[5] 2002RP-21 Les jeux de coûts : principaux concepts de solution

[6] 2003RP-04 Le cas des réseaux municipaux souterrains

[7] 2003RP-05 Partage des coûts dans l'entreprise et incitations

[8] 2003RP-06 Tarification optimale des infrastructures communes