2004s-07

Ressources renouvelables et non renouvelables, impatience et progrès technique exogène

Jean-Pierre Amigues, Ngo Van Long, Michel Moreaux

Série Scientifique
Scientific Series

Montréal
Février 2004

CIRANO
Centre interuniversitaire de recherche en analyse des organisations

CIRANO

Le CIRANO est un organisme sans but lucratif constitué en vertu de la Loi des compagnies du Québec. Le financement de son infrastructure et de ses activités de recherche provient des cotisations de ses organisations-membres, d'une subvention d'infrastructure du ministère de la Recherche, de la Science et de la Technologie, de même que des subventions et mandats obtenus par ses équipes de recherche.

CIRANO is a private non-profit organization incorporated under the Québec Companies Act. Its infrastructure and research activities are funded through fees paid by member organizations, an infrastructure grant from the Ministère de la Recherche, de la Science et de la Technologie, and grants and research mandates obtained by its research teams.

Les organisations-partenaires / The Partner Organizations

PARTENAIRE MAJEUR
. Ministère du développement économique et régional [MDER]

PARTENAIRES
. Alcan inc.
. Axa Canada
. Banque du Canada
. Banque Laurentienne du Canada
. Banque Nationale du Canada
. Banque Royale du Canada
. Bell Canada
. BMO Groupe Financier
. Bombardier
. Bourse de Montréal
. Caisse de dépôt et placement du Québec
. Développement des ressources humaines Canada [DRHC]
. Fédération des caisses Desjardins du Québec
. GazMétro
. Hydro-Québec
. Industrie Canada
. Ministère des Finances [MF]
. Pratt & Whitney Canada Inc.
. Raymond Chabot Grant Thornton
. Ville de Montréal

. École Polytechnique de Montréal
. HEC Montréal
. Université Concordia
. Université de Montréal
. Université du Québec à Montréal
. Université Laval
. Université McGill

ASSOCIE A :
. Institut de Finance Mathématique de Montréal (IFM^2)
. Laboratoires universitaires Bell Canada
. Réseau de calcul et de modélisation mathématique [RCM^2]
. Réseau de centres d'excellence MITACS (Les mathématiques des technologies de l'information et des systèmes complexes)

ISSN 1198-8177

Ressources renouvelables et non renouvelables, impatience et progrès technique exogène

Jean-Pierre Amigues[*], *Ngo Van Long*[†], *Michel Moreaux* [‡]

Résumé / ***Abstract***

Il existe une littérature assez abondante sur l'ordre dans lequel une société devrait utiliser ses ressources au cours du temps. Ce que nous voudrions explorer ici c'est l'incidence d'un progrès technique spécifique, permettant d'économiser les quantités de ressources requises par unité de produit, sur l'ordre dans lequel les dites ressources doivent être consommées le long d'un sentier optimal d'évolution de l'économie.
Une certaine tradition issue de la théorie de la croissance tend à concevoir le progrès technique comme une amélioration globale de la productivité de tous les facteurs. Le modèle développé ici part au contraire de l'idée qu'il existe un progrès technique spécifique qui vise à améliorer la productivité de tel ou tel facteur.
Sous un ensemble d'hypothèses plausibles, on montre que, pour certaines valeurs des paramètres du modèle, la société peut avoir intérêt à consommer d'abord une partie de son stock de ressource non renouvelable pendant un certain temps, puis arrêter d'utiliser cette ressource pour n'utiliser que la ressource renouvelable et enfin utiliser à nouveau la ressource non renouvelable.

Mots clés : progrès technique spécifique, ordre d'exploitation, ressources naturelles.

There is a large literature on the optimal order of exploitation of natural resources. We explore the impact of specific technical progress that enables the saving of resource inputs in production on the order of exploitation.
Models of growth tend to assume uniform and global technical progess. Our model however specifies that technical progress is specific to certain inputs.
Under a set of plausible assumptions, we show that, for certain sets of parameter values, it may be optimal to use exclusively at first a non renewable resource, then stop using this resource and switch into a renewable resource, and finally return to the use of the non renewable resource.

Keywords: *technical progress, order of exploitation, natural resources.*

Codes JEL : Q20, Q30, D90

[*] Université de Toulouse I, 21 Allée de Brienne, 31000, Toulouse, France. Email : amigues@toulouse.inra.fr.
[†] CIRANO et CIREQ, Department of Economics, McGill University, 855 Sherbrooke St West, Montreal, H3A 2T7, Canada. Email : ngo.long@mcgill.ca.
‡ Université de Toulouse I, 21 Allée de Brienne, 31000, Toulouse, France. Email : mmoreaux@cict.fr.

1 Introduction

De nombreuses ressources naturelles non renouvelables ont des substituts renouvelables. L'exemple le plus important des possibilités de substitution entre ressources non renouvelables et renouvelables est peut-être celui des différentes formes d'énergies primaires. Aux énergies fossiles non renouvelables comme le charbon, la tourbe, le pétrole et le gaz peuvent être substituées des énergies renouvelables comme l'énergie solaire et ses dérivées, l'énergie hydraulique ou l'énergie éolienne[1]. Ces ressources sont le plus souvent des substituts imparfaits les unes des autres car chacune requiert des quantités spécifiques d'autres facteurs pour produire la même quantité de bien final.

Il existe une littérature assez abondante sur l'ordre dans lequel une société devrait utiliser ses ressources au cours du temps[2]. Ce que nous voudrions explorer ici c'est l'incidence d'un progrès technique spécifique, permettant d'économiser les quantités de ressources requises par unité de produit, sur l'ordre dans lequel les dites ressources doivent être consommées le long d'un sentier optimal d'évolution de l'économie.

Une certaine tradition issue de la théorie de la croissance tend à concevoir le progrès technique comme une amélioration globale de la productivité de tous les facteurs. Le modèle développé ici part au contraire de l'idée qu'il existe un progrès technique spécifique qui vise à améliorer la productivité de tel ou tel facteur. Par exemple les historiens décrivent souvent le système industriel mis en place aux États-Unis au dix-neuvième siècle comme un système dans lequel la productivité du travail était significativement plus élevée que celle du système industriel anglais[3]. Aucun n'a jamais insisté cependant sur la supériorité du système américain dans l'économie des matériaux et des matières premières[4]. La fabrication d'un fusil, par exemple, demandait

[1] Pour un panorama des formes d'énergies primaires disponibles on pourra consulter par exemple Howes et Fainberg (1991) et pour les seules énergies renouvelables Boyle (1996) ou Johansson *et alii* (1993).

[2] On trouvera dans Amigues et Moreaux (2002) une mise au point récente pour ce qui concerne les modèles d'équilibre partiel. Pour les substitutions entre ressource non renouvelable et renouvelable l'article fondateur est celui de Dasgupta et Heal (1974). La plupart des modèles ont pour objet d'expliquer le passage de l'exploitation d'une ressource non renouvelable, qui s'épuise, à celui d'une ressource renouvelable. Une exception notable est le modèle récent de Tahvonen et Salo (2001) qui montrent, par simulations, qu'on peut avoir un ordre différent, la société commençant par exploiter une ressource renouvelable, puis une ressource non renouvelable puis enfin à nouveau la ressource renouvelable.

[3] Voir par exemple Habakkuk (1962), Hoke (1990), Hounshell (1984), Mayr et Post (1981), Rosenberg (1972), Strassmann (1959).

[4] Tout au moins dans la phase initiale de différenciation des deux systèmes industriels. Il semble acquis en effet qu'à la fin du dix neuvième siècle, ou au début du vingtième, l'un des facteurs de réussite du système américain ait été la qualité de certains des matériaux

moins de travail et surtout moins de travail qualifié. Mais les fusils anglais et américains pesaient à peu près le même poids et demandaient autant d'acier l'un que l'autre.

La distinction entre les deux types de progrès techniques, global et spécifique, est d'autant plus nette que les facteurs de production sont peu substituables. Considérons d'abord le cas extrême d'une fonction de production de type Leontiev pour laquelle aucune substitution de facteurs n'est possible :

$$y = a \min\{\alpha_i x_i,\ i = 1, ..., n\} \quad , a > \ 0 \text{ et } \alpha_i > 0, i = 1, ..., n$$

Un progrès technique global ou indifférencié est celui qui permet d'accroître le coefficient a. Il est équivalent à une amélioration dans la même proportion de tous les coefficients $\alpha_i, i = 1, .., n$. Un progrès technique dédié ou spécifique au seul facteur i est celui qui permet d'accroître le seul coefficient α_i. Considérons maintenant l'autre cas extrême, celui d'une fonction de production de type Cobb-Douglas. Pour ce type de fonction, la distinction n'a pas beaucoup de sens. En effet, soit une fonction de la forme :

$$y = a\Pi_{i=1}^{n}(\alpha_i x_i)^{\beta_i}\ ,\ a > 0,\ \alpha_i > 0 \text{ et } \beta_i > 0\ ,\ i = 1, .., n \text{ et } \Sigma_{i=1}^{n}\beta_i = 1.$$

On peut toujours réécrire cette fonction sous la forme équivalente suivante :

$$y = A\Pi_{i=1}^{n} x_i^{\beta_i} \quad , \quad A = a\Pi_{i=1}^{n}\alpha_i^{\beta_i},$$

de sorte qu'il est pratiquement impossible de distinguer un progrès technique spécifique d'un progrès technique global.

Pour aller à l'essentiel on posera que les fonctions de production sont du type Leontiev et que la société dispose de deux ressources, une ressource renouvelable et une ressource non renouvelable. Combinée à du travail, chaque ressource permet de produire le bien de consommation finale. Les coefficients techniques de chaque ressource s'améliorent au cours du temps sous l'effet d'un progrès technique considéré ici comme exogène dans cette première approche.

Par souci de simplicité on suppose que l'utilité instantanée est proportionnelle à la consommation et les utilités instantanées sont actualisées à un taux d'actualisation social constant. L'hypothèse de proportionnalité de

---

qu'elle avait réussi à produire à grande échelle. En particulier pour les industries mécaniques, la qualité des aciers américains a été l'un des facteurs clé de leurs grandes réussites industrielles. A notre connaissance il n'existe pas d'étude systématique de la question, à vrai dire assez vaste. C'est cependant l'une des conclusions fortes que l'on est conduit à tirer de la lecture de nombreuses monographies d'industries ou de saga industrielles. La lecture des mémoires d'Henri Ford, est à ce sujet très instructive (cf Ford (1924), chap.V : La production).

l'utilité à la consommation peut sembler forte. Elle permet surtout de mettre très vite en évidence un certain nombre de phénomènes qui subsistent sous des hypothèses plus générales en particulier sous des hypothèses d'élasticité constante de l'utilité marginale. Les discontinuités des sentiers optimaux de consommation et d'utilisation des ressources qu'implique l'hypothèse de linéarité sont alors gommés, mais la structure générale des sentiers, c'est à dire les types de phase et leur enchaînement, reste la même.

Sous cet ensemble d'hypothèses on montre que, pour certaines valeurs des paramètres du modèle, la société peut avoir intérêt à consommer d'abord une partie de son stock de ressource non renouvelable pendant un certain temps, puis arrêter d'utiliser cette ressource pour n'utiliser que la ressource renouvelable et enfin utiliser à nouveau la ressource non renouvelable[5],[6].

L'étude est organisée comme suit. Le modèle est exposé à la section2. On examine à la section 3 ce que seraient les politiques optimales en l'absence d'un substitut renouvelable. Le cas où le substitut renouvelable est la ressource la moins coûteuse en travail est traité à la section 4. Le cas plus intéressant et plus complexe où c'est au contraire la ressource non renouvelable qui est la moins coûteuse fait l'objet de la section 5. On conclut brièvement à la section 6.

2 Le modèle

On considère une économie dont la population est stationnaire et l'offre de travail est inélastique. Sans perte de généralité on peut poser que la quantité maximale de travail disponible à chaque instant est égale à 1.

La production du bien de consommation requiert du travail et des ressources naturelles. L'économie dispose de deux types de ressources naturelles : une ressource renouvelable inépuisable dont le flux de renouvellement est constant, et une ressource non renouvelable donc épuisable. Les facteurs de production, travail et ressource, sont strictement complémentaires. Les coefficients techniques des fonctions de production ne sont cependant pas les mêmes selon que l'une ou l'autre ressource est utilisée. Les deux types de ressources ne sont pas des substituts parfaits.

[5] On retrouve aussi pour d'autres ensembles de valeurs des paramètres des séquences semblables à celles mises en évidence par Thavonen et Salo (2001), i.e. ressource renouvelable - ressource non renouvelable - ressource renouvelable.

[6] L'exploitation d'une ressource non renouvelable au cours de deux périodes séparées dans le temps est un phénomène assez classique dès lors qu'il y a des coûts fixes d'ouverture des sites miniers (cf Gaudet *et alii* (2001)). Ici le phénomène ne tient pas à la présence de ce type de coûts.

Indiçons les variables et les coefficients techniques par e ou r selon qu'il s'agit du secteur qui utilise la ressource épuisable ou du secteur qui utilise la ressource renouvelable et soit c_t la production totale de bien de consommation à l'instant t, somme des quantités produites dans chacun des secteurs : $c_t = c_{et} + c_{rt}$.

Si (ℓ_{et}, s_t) est le vecteur des quantités de facteurs, travail et ressource, mobilisées à l'instant t dans le secteur qui produit à partir de la ressource épuisable et (ℓ_{rt}, r_t) le vecteur des quantités de facteurs mobilisées dans l'autre secteur, alors :

$$c_{et} = min\{A_e\ell_{et}, B_{et}s_t\} \text{ et } c_{rt} = min\{A_r\ell_{rt}, B_{rt}r_t\} \ , \ t \geq 0,$$

où $A_x, x \in \{e, r\}$ est le coefficient technique de productivité du travail, et B_{xt} le coefficient technique de productivité de la ressource. Les coefficients techniques de productivité du travail sont supposés invariants au cours du temps, alors que les coefficients techniques des ressources sont supposés croître à taux constants sous l'effet d'un progrès technique exogène :

$$\dot{B}_{xt} = b_x B_{xt} \ , \ x \in \{e, r\} \ \Rightarrow \ B_{xt} = B_{xo} \ e^{bxt} \ , \ t \geq 0$$

où $b_x > 0$ est le taux de croissance instantané du coefficient technique de productivité de la ressource x. B_{xt} peut-être vu comme un stock de connaissances scientifiques et techniques qui permettent d'améliorer l'utilisation de la ressource concernée. Ce stock de connaissances est ici supposé croître de façon exogène.

Le travail peut être affecté indifféremment à l'un ou l'autre secteur de production. La main d'oeuvre est parfaitement mobile : son transfert d'un secteur à l'autre s'effectue sans aucun délai et sans aucun coût. Les contraintes qui régissent l'allocation du travail disponible prennent donc la forme suivante :

$$1 - \ell_{et} - \ell_{rt} \geq 0 \ , \ \ell_{et} \geq 0 \text{ et } \ell_{rt} \geq 0.$$

La société dispose initialement d'un stock S_0 de ressource non renouvelable. Puisque la ressource est non renouvelable, on doit avoir, en notant S_t le stock de ressource non encore employé à l'instant t :

$$\dot{S}_t = -s_t \ , \text{ et } s_t \geq 0 \ , \ t \geq 0.$$

On suppose pour simplifier que les coûts d'extraction et de traitement avant mise à la disposition du secteur de production du bien de consommation, est nul. On peut aussi considérer que le coefficient $1/A_e$ représente la quantité de travail nécessaire pour extraire la ressource, la traiter et la transformer en bien de consommation. Les coefficients (A_e, B_{et}) s'interprètent alors comme les coefficients techniques d'un secteur intégré.

La société dispose aussi d'un flux constant $\bar{r}$ de ressource renouvelable potentiellement exploitable. Ce flux n'est pas stockable de sorte que la quantité qui n'en est pas immédiatement utilisée est irrémédiablement perdue. On a donc :

$$\bar{r} - r_t \geq 0 \text{ et } r_t \geq 0 \ , \ t \geq 0.$$

L'utilité instantanée de la consommation est proportionnelle à la quantité consommée au même instant. Sans perte de généralité on peut poser que le coefficient de proportionnalité est égal à 1 :

$$u(c_t) = c_t = c_{et} + c_{rt} \ , \ t \geq 0$$

Soit ρ le taux d'escompte social instantané que l'on suppose constant. L'objectif du planificateur social est de maximiser la somme des utilités instantanées actualisées qu'implique le sentier de consommation choisi parmi l'ensemble des sentiers techniquement possibles étant donné S_0 et $\bar{r}$.

On peut simplifier la formulation du problème du planificateur en ne considérant que les sentiers efficaces d'utilisation des facteurs, i.e. les sentiers tels que :

$$\begin{aligned} c_{et} = A_e \ell_{et} = B_{et} s_t &\quad \Rightarrow \quad s_t = A_e B_{et}^{-1} \ell_{et} \\ c_{rt} = A_r \ell_{rt} = B_{rt} s_t &\quad \Rightarrow \quad s_t = A_r B_{rt}^{-1} \ell_{rt} \end{aligned}$$

Ce faisant, on ramène à deux le nombre des variables de commande. On retiendra les niveaux d'emploi ℓ_{et} et ℓ_{rt}[7] de sorte que le problème du planificateur réputé bienveillant se formule comme suit :

$$(P) \qquad \max_{\{(\ell_{et}, \ell_{rt}), t \geq 0\}} \int_0^{+\infty} [A_e \ell_{et} + A_r \ell_{rt}] e^{-\rho t} dt \tag{2.1}$$

$$\dot{S}_t = -A_e B_{et}^{-1} \ell_{et} \ , \ S_0 \text{ donné} \ , S_t \geq 0 \qquad , \ t \geq 0 \tag{2.2}$$

$$\dot{B}_{et} = b_e B_{et} \ , \ B_{eo} \text{ donné} \qquad , \ t \geq 0 \tag{2.3}$$

$$\bar{r} - A_r B_{rt}^{-1} \ell_{rt} \geq 0 \qquad , \ t \geq 0 \tag{2.4}$$

$$\dot{B}_{rt} = b_r B_{rt} \ , \ B_{ro} \text{ donné} \qquad , \ t \geq 0 \tag{2.5}$$

$$1 - \ell_{et} - \ell_{rt} \geq 0 \ , \ \ell_{et} \geq 0 \text{ et } \ell_{rt} \geq 0 \qquad , \ t \geq 0 \tag{2.6}$$

[7] On ne peut pas éliminer a priori l'une ou l'autre variable ℓ_{et} ou ℓ_{rt} car, comme on le montre plus loin, la contrainte $1 - \ell_{et} - \ell_{rt} \geq 0$ n'est pas toujours saturée le long de tout sentier optimal

Soit H_t le hamiltonien du problème :

$$H_t = [A_e \ell_{et} + A_r \ell_{rt}]e^{-\rho t} - \lambda_t A_e B_{et}^{-1} \ell_{et},$$

et L_t le lagrangien :[8]

$$L_t = H_t + \nu_t[\bar{r} - A_r B_{rt}^{-1} \ell_{rt}] + \omega_t[1 - \ell_{et} - \ell_{rt}] + \gamma_{et}\ell_{et} + \gamma_{rt}\ell_{rt}$$

Les conditions nécessaires sont :

$$\partial L_t/\partial \ell_{et} = 0 \;\Leftrightarrow\; A_e e^{-\rho t} - \lambda_t A_e B_{et}^{-1} - \omega_t + \gamma_{et} = 0 \tag{2.7}$$

$$\partial L_t/\partial \ell_{rt} = 0 \;\Leftrightarrow\; A_r e^{-\rho t} - \nu_t A_r B_{rt}^{-1} - \omega_t + \gamma_{rt} = 0 \tag{2.8}$$

$$\nu_t \geq 0 \;,\; \bar{r} - A_r B_{rt}^{-1} \ell_{rt} \geq 0 \text{ et } \nu_t[\bar{r} - A_r B_r^{-1} \ell_{rt}] = 0 \tag{2.9}$$

$$\gamma_t \geq 0 \;,\; 1 - \ell_{et} - \ell_{rt} \geq 0 \text{ et } \gamma_t[1 - \ell_{et} - \ell_{rt}] = 0 \tag{2.10}$$

$$\gamma_{et} \geq 0 \;,\; \ell_{et} \geq 0 \text{ et } \gamma_{et}\ell_{et} = 0 \tag{2.11}$$

$$\omega_{rt} \geq 0 \;,\; \ell_{rt} \geq 0 \text{ et } \omega_{rt}\ell_{rt} = 0 \tag{2.12}$$

$$\dot{\lambda}_t = -\partial L_t/\partial S_t = 0 \Rightarrow \lambda_t = \lambda = cte \tag{2.13}$$

La condition de transversalité a donc pour expression :

$$\lim_{t \uparrow +\infty} \lambda S_t = 0 \tag{2.14}$$

3 Les politiques optimales en l'absence de substitut renouvelable

En l'absence d'un substitut renouvelable il existe deux types de politiques optimales selon les configurations de valeurs des paramètres structurels du modèle ρ et b_e et de valeurs initiales des variables d'état B_{eo} et S_o.

Si $\rho > b_e$ l'impatience est forte au regard des possibilités de consommation future et la politique optimale consiste à consommer le plus possible, le plus tôt possible. Si au contraire $\rho < b_e$ et si le montant initial des ressources ne permet pas de suivre dès l'instant initial le sentier de consommation maximale $c_t = A_e, t \geq 0$, le taux de croissance de la productivité de la ressource est suffisamment fort au regard de l'impatience pour que la société soit prête

[8] Comme souvent dans la formulation de ce genre de problème, on néglige la contrainte $S_t \geq 0$ qui sera vérifiée le long de tous les sentiers présentés comme optimaux lorsqu'on la néglige. Ces sentiers sont alors évidemment optimaux lorsque cette contrainte est explicitement prise en compte.

à s'abstenir de consommer dans un premier temps et attendre que la productivité de la ressource ait atteint le niveau qui lui permettra de suivre indéfiniment le niveau de consommation maximal[9].

On détermine d'abord le montant de ressource requis à une certaine date pour qu'à partir de cette date la société puisse suivre un sentier de consommation constante. On établit ensuite la condition fondamentale d'arbitrage qui doit être satisfaite le long de tout sentier optimal. On en déduit que les politiques optimales sont bien celles que l'on vient d'indiquer. On renvoie en appendice (cf Appendice 1) l'étude formelle du problème.

3.1 Stock de ressource et soutenabilité

Pour qu'un sentier de consommation constante $c_t = \underline{c}, t \geq \theta, \underline{c} \in (0, A_e]$ soit réalisable à partir de l'instant θ, il faut, en tout $t \geq \theta$, sacrifier une quantité de ressource $\underline{s}_t(\underline{c})$ égale à :

$$\underline{s}_t(\underline{c}) = B_{e0}^{-1} e^{-b_e t} \underline{c}.$$

Pour tout $t \geq \theta$, soit $\underline{S}_{\theta t}(\underline{c})$ la quantité de ressource transformée en bien de consommation sur l'intervalle de temps $[\theta, t)$:

$$\underline{S}_{\theta t}(\underline{c}) = \int_{\theta}^{t} \underline{s}_{\tau}(\underline{c}) d\tau = b_e^{-1} B_{e0}^{-1} e^{-b_e \theta} [1 - e^{-b_e(t-\theta)}] \underline{c}.$$

Afin d'être en mesure de suivre indéfiniment le chemin $c_t = \underline{c}, t \geq \theta$, il faut que la société dispose à l'instant θ d'un volume de ressource au moins égal à $\underline{S}_{\theta\infty}(c)$ défini comme :

$$\underline{S}_{\theta\infty}(\underline{c}) = lim_{t \uparrow +\infty} \underline{S}_{\theta t}(\underline{c}) = b_e^{-1} B_{e0}^{-1} e^{-b_e \theta} \underline{c}.$$

Si donc $S_\theta \geq \underline{S}_{\theta\infty}(A_e) = b_e^{-1} A_e B_{e0}^{-1} e^{-b_e \theta}$, la société est à même de se garantir à chaque instant $t \geq \theta$ le niveau de consommation maximum $c_t = A_e, t \geq \theta$. En particulier si $S_0 \geq b_e^{-1} A_e B_{e0}^{-1} = \underline{S}_{0\infty}$, la société peut se garantir le niveau de consommation maximum dès l'instant $t = 0$ de sorte que la politique optimale est trivialement la politique $\{\ell_{et}^* = 1, t \geq 0\}$. Il ne reste donc à examiner que les cas où S_0 est inférieur au niveau critique $b_e^{-1} A_e B_{e0}^{-1}$ que l'on notera S_0^m.

[9] On néglige les cas $b_e = \rho$ de mesure nulle dans l'ensemble des valeurs des paramètres à priori possibles

3.2 Arbitrage déterminant les politiques optimales

Puisque l'utilité marginale instantanée de la consommation est constante, pour que la société soit indifférente entre réduire (augmenter) sa consommation d'un montant $dc_t = dc_{et}$ à l'instant t et l'augmenter(réduire) d'un montant $dc_{t+h} = dc_{e,t+h}$ à l'instant $t + h, h > 0$, il faut et il suffit que les valeurs actualisées de dc_t et dc_{t+h} soient égales i.e. que $dc_t = e^{-\rho h} dc_{t+h}$, si $dc_t < e^{-\rho h} dc_{t+h}$, la société préfère substituer dc_{t+h} en $t+h$ à dc_t en t, l'inverse étant vrai si l'inégalité est renversée.

En renonçant à consommer dc_t en t, la société économise une quantité $ds = B_{et}^{-1} dc_t$ de ressource non renouvelable. Si cette quantité est gardée en réserve jusqu'à l'instant $t+h$ et si à cette date la contrainte $1 - \ell_{et} \geq 0$ n'est pas saturée, elle pourra accroître sa consommation en $t + h$ d'une quantité dc_{t+h} égale à :

$$dc_{t+h} = B_{e,t+h} ds = B_{e,t+h} B_{et}^{-1} dc_t = e^{b_e h} dc_t.$$

La société voudra reporter sa consommation dans le futur, ne pas changer de politique ou enfin avancer sa consommation selon que respectivement :

$$e^{b_e h} >, =, < e^{\rho h},$$

et donc localement, elle voudrait à l'instant t reporter sa consommation à demain, ne la changer ou consommer plus, plus tôt, selon que respectivement :

$$b_e >, =, < \rho.$$

Le plein exercice de ces arbitrages peut être contrarié soit parce que la société, voulant réduire sa consommation à une certaine date pour la reporter à une autre, ne le peut pas car sa consommation est déjà nulle, soit qu'au contraire voulant l'augmenter elle ne le peut pas car la totalité du travail est déjà employée.

3.3 Détermination des politiques optimales

Si $\rho > b_e$ et si $S_0 < S_0^m$, la société veut consommer le plus possible, le plus vite possible. La politique optimale consiste alors à suivre le sentier de consommation maximale jusqu'à épuisement du stock de ressource initialement disponible S_0, c'est à dire jusqu'à la date $\bar{t}$ solution de l'équation :

$$\underline{S}_{0t}(A_e) = S_0.$$

Si $\rho < b_e$ et si $S_0 < S_0^m$, la société est toujours prête à sacrifier une consommation présente au profit de la consommation future permise par l'économie de ressource qu'implique ce sacrifice et par l'accroissement à venir de la productivité de la ressource. On en conclut que la politique optimale consiste à renoncer à consommer jusqu'à la date $\underline{t}$ à laquelle la productivité de la ressource sera suffisamment élevée pour que la société puisse commencer à suivre le sentier de consommation maximale $c_t = A_e, t \geq \underline{t}$. Cette date $\underline{t}$ est la solution de l'équation :

$$\underline{S}_{t\infty}(A_e) = S_0.$$

4 Les politiques optimales en présence d'un substitut renouvelable moins coûteux en travail

Puisque la productivité du travail est la plus forte dans le secteur qui produit à partir de la ressource renouvelable et puisque l'utilisation de cette ressource n'obère pas l'avenir, le meilleur usage du travail consiste à chaque instant à l'affecter prioritairement à ce secteur. Alors de deux choses l'une :

- ou bien la ressource renouvelable est initialement abondante, i.e. $A_r \leq B_{r0}\bar{r}$, de sorte que la totalité du travail peut être affectée au secteur produisant à partir de cette ressource et c'est évidemment la politique optimale : $\ell_{rt} = 1$ et $c_t = c_{rt} = A_r, t \geq 0$;
- ou bien la ressource renouvelable est initialement rare, i.e. $A_r > B_{r0}\bar{r}$ et il faut déterminer l'usage optimal de la ressource non renouvelable, ce à quoi est consacré le reste de cette section.

Lorsque la ressource est initialement rare, elle le reste jusqu'à la date T_r à laquelle $A_r = B_{rt}\bar{r}$, i.e. jusqu'à la date solution de l'équation $A_r = B_{r0}e^{b_r t}\bar{r}$, d'où :

$$T_r = b_r^{-1}[logA_r - logB_{r0} - log\bar{r}].$$

Sur l'intervalle $[0, T_r)$ l'exploitation maximale de la ressource renouvelable mobilise une partie $\bar{\ell}_{rt}$ du travail disponible égale à :

$$\bar{\ell}_{rt} = A_r^{-1}B_{r0}e^{b_r t}\bar{r}\ ,\ t \in [0, T_r).$$

Définissons $\bar{\ell}_{et}$ comme la partie complémentaire de l'offre de travail :

$$\bar{\ell}_{et} = 1 - \bar{\ell}_{rt} = 1 - A_r^{-1}B_{r0}e^{b_r t}\bar{r}\ ,\ t \in [0, T_r).$$

Si le montant initial du stock de ressource non-renouvelable est suffisamment élevé, l'emploi dans le secteur qui utilise cette ressource devra être égal à son plafond $\bar{\ell}_{et}$. Pour déterminer le niveau critique des réserves initiales qui permet d'appliquer cette politique procédons comme suit.

Un niveau d'emploi $\bar{\ell}_{et}$ implique qu'on prélève la quantité de ressource $\bar{s}_t$ égale à :

$$\bar{s}_t = A_e B_{et}^{-1} \bar{\ell}_{et} = A_e B_{e0}^{-1} [e^{-b_e t} - A_r^{-1} B_{r0} e^{(b_r - b_e)t}].$$

Définissons $\bar{S}_{\theta t}$ comme la quantité minimale de ressource nécessaire pour suivre cette politique sur l'intervalle de temps $[\theta, t), t \leq T_r$:

$$\bar{S}_{\theta t} = \int_\theta^t \bar{s}_\tau d\tau.$$

Le montant critique des réserves initiales dont il faut disposer pour suivre la politique $\ell_{et} = \bar{\ell}_{et}$ sur la totalité de l'intervalle $[0, T_r)$ est donc égal à $\bar{S}_{0T_r}$. Supposons à partir de maintenant que $S_0 < \bar{S}_{0T_r}$.

Si $S_0 < \bar{S}_{0T_r}$ le problème est alors celui de savoir quand, sur l'intervalle $[0, T_r)$, il faut exploiter le stock S_0. Or l'arbitrage auquel doit procéder le planificateur concernant l'utilisation de la ressource non renouvelable, se pose exactement dans les mêmes termes que l'arbitrage de la section précédente et conduit au même type de solution (cf Appendice A.2 pour une présentation formelle de l'argument).

Lorsque $\rho > b_e$ l'impatience est relativement forte au regard des possibilités d'évolution de la productivité de la ressource non renouvelable et la politique optimale consiste à épuiser cette ressource le plus vite possible, i.e. $\ell_{et} = \bar{\ell}_{et}$ sur un intervalle de temps $[0, \underline{t})$, où $\underline{t}$ est la solution de l'équation :

$$\bar{S}_{0t} = S_0.$$

Si au contraire $\rho < b_e$ l'impatience n'est pas trop forte et la politique optimale consiste à retarder l'utilisation de la ressource non renouvelable, i.e. $\ell_{et} = \bar{\ell}_{et}$ sur un intervalle de temps $[\bar{t}, T_r)$ où $\bar{t}$ est la solution de l'équation :

$$\bar{S}_{tT_r} = S_0.$$

5 Les politiques optimales en présence d'un substitut renouvelable plus coûteux en travail

Puisque la productivité du travail est la plus élevée dans le secteur qui utilise la ressource épuisable, la consommation instantanée est maximisée lorsque la totalité du travail est dirigée vers ce secteur. On sait (cf sous-section 3.1) que la société pourra mener en permanence cette politique si elle dispose de stocks initiaux suffisamment importants, $S_0 \geq S_0^m$, et c'est évidemment la politique optimale dans ce cas.

Supposons maintenant que le stock S_0 est inférieur à S_0^m. On montre d'abord que si la ressource renouvelable est initialement abondante alors la politique optimale d'utilisation de la ressource non renouvelable est la même qu'en l'absence de substitut. Lorsqu'au contraire la ressource renouvelable est rare initialement la politique optimale est différente et plus complexe. Ceci tient au fait qu'ici deux conditions d'arbitrage doivent être simultanément vérifiées.

5.1 La ressource renouvelable est initialement abondante

Montrons d'abord que la condition d'arbitrage qui régit l'usage optimal de la ressource non renouvelable est la même qu'en l'absence du substitut.

Considérons un instant t auquel $s_t > 0, \bar{r} - r_t > 0$ et $\ell_{et} + \ell_{rt} = 1$, un instant $t+h, h > 0$, auquel $r_{t+h} > 0$ et $\ell_{e,t+h} + \ell_{r,t+h} = 1$, et la substitution de production suivante entre ces deux instants. A l'instant t l'utilisation de la ressource non renouvelable est réduite d'un montant ds et la quantité de travail libérée est affectée à l'exploitation de la ressource renouvelable. La quantité de ressource non renouvelable ds est gardée en réserve jusqu'à l'instant $t+h$ auquel elle est utilisée, le travail additionnel requis étant obtenu par réduction de l'emploi dans le secteur exploitant la ressource renouvelable.

La perte d'utilité actualisée induite par la réduction de la consommation à la date et s'élève à :

$$e^{-\rho t} dc_t = e^{-\rho t}[1 - A_r A_e^{-1}] B_{et} ds.$$

L'accroissement d'utilité actualisée permis par l'augmentation de la consommation à la date $t+h$ est égal à :

$$e^{-\rho(t+h)} dc_{t+h} = e^{\rho(t+h)}[1 - A_r A_e^{-1}] B_{et} e^{b_e h} ds.$$

Puisque $A_e > A_r, 1 - A_r A_e^{-1} > 0$ et comme dans le cas où il n'existe pas de substitut renouvelable, la société voudra reporter l'utilisation de la ressource non renouvelable, ne rien changer ou au contraire l'avancer (si $s_{t+h} > 0$), selon que respectivement $b_e >, =, < \rho$.

Si $\rho > b_e$ la société est impatiente et veut consommer le plus possible, le plus vite possible. Elle doit donc commencer par épuiser la ressource non renouvelable et ensuite exploiter la ressource renouvelable, de sorte que :

$$c_t = \begin{cases} A_e & \text{si } t \in [0, \bar{t}) \\ A_r & \text{si } t \in [\bar{t}, +\infty), \end{cases}$$

où $\bar{t}$ est déterminé comme à la sous-section 3.3 supra.

Si $\rho < b_e$ la société doit commencer par exploiter la seule ressource renouvelable jusqu'à l'instant $\underline{t}$, déterminé comme à la sous-section 3.3, instant auquel la productivité de la ressource non renouvelable est suffisamment élevée pour suivre le sentier soutenable de consommation maximale :

$$c_t = \begin{cases} A_r & \text{si } t \in [0, \underline{t}) \\ A_e & \text{si } t \in [\underline{t}, +\infty), \end{cases}$$

5.2 La ressource renouvelable est rare initialement

Il existe maintenant un intervalle de temps $[0, T_r)$ (cf section 4 supra) pendant lequel la société, le voudrait elle, ne peut pas employer la totalité du travail disponible dans le secteur qui exploite la ressource renouvelable. Il en résulte que les sentiers de consommation optimaux définis à la sous section précédente ne peuvent pas être suivis si $\rho > b_e$ et $\bar{t} < T_r$ ou si $\rho < b_e$ et $\underline{t} < T_r$. Cela se traduit par l'apparition de nouvelles conditions d'arbitrage qui viennent s'ajouter aux conditions identifiées à la sous-section 5.1 ci-dessus.

Distinguons selon que ρ est supérieur ou inférieur à b_e.

5.2.1 Le taux d'escompte social est relativement élevé : $\rho > b_e$

A. Condition d'arbitrage sur l'intervalle $[0, T_r)$

Puisque l'intuition est ici que la société est impatiente de consommer, considérons une politique qui spécifierait que :

1. [i.)]
2. à l'instant $t < T_r$ la société exploite la ressource non renouvelable qui permet de produire le plus de bien de consommation par unité de travail, et utilise éventuellement la ressource renouvelable sans en saturer la contrainte de disponibilité, i.e. $\ell_{rt} < A_r^{-1} B_{rt} \bar{r}$;
3. à l'instant $t + h < T_r, h > 0$, la société n'exploite que la ressource renouvelable, la contrainte d'utilisation de la dite ressource étant saturée, i.e. $\ell_{r,t+h} = A_r^{-1} B_{rt} \bar{r}$.

Cette politique serait la politique à suivre si le stock S_0 étant peu élevé, la société décidait de l'épuiser d'abord avant d'exploiter la ressource renouvelable, de sorte que l'on aurait $\bar{t} < T_r$.

La contrainte d'utilisation de la ressource renouvelable n'étant pas saturée à l'instant t, la baisse de consommation qu'impliquerait une légère réduction ds de l'usage de la ressource non renouvelable est partiellement compensable par un usage accru de la ressource renouvelable, d'où une perte d'utilité actualisée égale à :

$$e^{-\rho t}dc_t = [1 - A_r A_e^{-1}]B_{et}e^{-\rho t}ds.$$

A l'instant $t+h$ la contrainte d'utilisation de la ressource renouvelable est saturée, mais puisque $\ell_{rt} < 1$, la société peut accroître la consommation en exploitant la ressource non renouvelable épargnée sans avoir à réduire l'exploitation de la ressource renouvelable, d'où un gain d'utilité actualisée égal à :

$$e^{-\rho(t+h)}dc_{t+h} = e^{-\rho(t+h)}B_{et}e^{b_e t}ds.$$

Le bilan de l'opération s'établit donc comme suit en termes d'utilité actualisée :

$$\left[e^{-(\rho-b_e)h} - (1 - A_r A_e^{-1})\right] B_{et}e^{-\rho t}ds.$$

Ce bilan est positif si $h > \bar{h}$ où $\bar{h}$ est la valeur de h qui annule le terme entre crochets de l'expression ci-dessus :

$$\bar{h} = -(\rho - b_e)^{-1}\log(1 - A_r A_e^{-1})$$

Cette nouvelle condition d'arbitrage conduit à distinguer selon que $\bar{h}$ est supérieur ou inférieur à T_r.

B. Le délai $\bar{h}$ est supérieur au délai T_r

La prise en compte des deux conditions d'arbitrage, celle qu'on vient d'établir et celle déjà établie à la sous-section 5.1, amène à définir deux niveaux critiques des réserves initiales, notés S_0^1 et $S_0^2, S_0^1 < S_0^2$, en deçà et au-delà desquels les politiques optimales changent de forme.

Le stock S_0^1 est le stock dont la société devrait disposer si, sur l'intervalle $[0, T_r)$, elle n'employait pour exploiter la ressource non renouvelable que le travail en excédent après exploitation de la totalité du flux de la ressource renouvelable et si, au-delà de T_r, elle n'exploitait pas la ressource non renouvelable :

$$S_0^1 = \int_0^{T_r} \bar{s}_t dt,$$

où $\bar{s}_t$ est le flux d'extraction défini à la section 4 supra.

On notera que sur l'intervalle $[0, T_r)$ le sentier de consommation est décroissant et convexe :

$$\dot{c}_{rt} = B_{rt}b_r\bar{r}\ ,\ \dot{c}_{et} = -A_e A_r^{-1}B_{rt}b_r\bar{r} \text{ et } \dot{c}_t = [1 - A_r A_e^{-1}]B_{rt}b_r\bar{r} > 0$$

$$\ddot{c}_{rt} = B_{rt} b_r^2 \bar{r} \ , \ \ddot{c}_{et} = -A_e A_r^{-1} B_{rt} b_r^2 \bar{r} \text{ et } \ddot{c}_t = [1 - A_r A_e^{-1}] B_{rt} b_r^2 \bar{r} > 0.$$

Le stock S_0^2 est le stock qui serait nécessaire si sur l'intervalle de temps $[0, T_r)$ la société n'exploitait que la ressource non renouvelable et ne l'utilisait plus ensuite :

$$S_0^2 = \int_0^{T_t} s_t^m dt, \text{ où } s_t^m = A_e B_{e0}^{-1} b_e^{-1} e^{-b_e t}.$$

Décrivons maintenant comment varient les politiques optimales en fonction de S_0.

a- Cas $S_0 < S_0^1$

Si $S_0 < S_0^1$ la politique optimale est la suivante. Initialement la société utilise la totalité de la ressource renouvelable, le travail restant étant affecté au secteur qui produit à partir de la ressource non renouvelable. Puisque $S_0 < S_0^1$ il existe une date $\theta < T_r$ à laquelle la ressource non renouvelable est épuisée. Ensuite la société n'utilise que la ressource renouvelable. La date θ est la solution de l'équation :

$$\int_0^t \bar{s}_\tau d\tau = S_0,$$

et lorsque S_0 tend vers S_0^1 la date θ tend vers T_r.

Le sentier de consommation correspondant à cette date politique est illustré à la Figure 1 ci-dessous.

$\boxed{\text{Figure 1}}$

Vérifions que cette politique ne laisse ouverte aucune opportunité d'arbitrage.

1. [i.)]
2. Le bilan d'une réduction de l'usage de la ressource épuisable d'un montant ds à une date $t + h, 0 < t < t + h < T_r$, qui permet d'augmenter son usage à la date t, s'établit en termes d'utilité actualisée, comme suit :
$$[(1 - A_r A_e^{-1}) - e^{-(\rho - b_e)h}] B_{et} e^{-\rho t} ds.$$
Puisque $h < b < T_r < \bar{h}$, le terme entre crochets est négatif et donc le bilan aussi ;

3. Le bilan d'une réduction de l'usage de la ressource non renouvelable d'un montant ds à une date $t < \theta$, permettant d'augmenter son usage à une date $t + h, h > T_r - t$, s'établit en termes d'utilité actualisée, comme suit :

$$[e^{-(\rho - b_e)h} - 1][1 - A_r A_e^{-1}] B_{et} e^{-\rho t} ds.$$

Puisque $\rho > b_e$, le premier terme entre crochets est négatif et le bilan aussi ;

4. Le bilan d'une réduction de l'usage de la ressource non renouvelable d'un montant ds à une date $t < \theta$, qui permet d'augmenter son usage à une date $t+h, \theta - t < h < T_r - t$, s'établit en termes d'utilité actualisée, comme suit :

$$[e^{-(\rho - b_e)h} - 1] B_{et} e^{-\rho t} ds.$$

Puisque $\rho > b_e$ ce bilan est négatif.

b- Cas $S_0^1 < S_0 < S_0^2$

Dans ce cas la société doit n'utiliser initialement que la ressource non renouvelable, $\ell_{et} = 1$ jusqu'à une date $\bar{t} < T_r$. Sur l'intervalle $[\bar{t}, T_r)$ la société utilise la totalité de la ressource renouvelable $\ell_{rt} = \bar{\ell}_{rt}$ et le travail restant sert à exploiter la ressource non renouvelable qui est épuisée à l'issue de cette phase. A partir de l'instant T_r la société n'utilise plus que la seule ressource renouvelable. La date $\bar{t}$ est la valeur de t solution de l'équation :

$$\int_0^t s_\tau^m d\tau + \int_t^{T_r} \bar{s}_\tau d\tau = S_0.$$

Lorsque S_0 tend vers S_0^2, $\bar{t}$ tend vers T_r.

Le sentier de consommation correspondant à cette politique est illustré à la Figure 2 ci-dessous.

Figure 2

On laisse au lecteur le soin de vérifier que toutes les possibilités d'arbitrage sont épuisées lorsque la société suit cette politique.

c- Cas $S_0^2 < S_0 < S_0^m$

La politique optimale consiste ici à n'utiliser que la ressource non renouvelable jusqu'à ce qu'elle soit épuisée ce qui intervient à une date $\bar{t} > T_r$.

Ensuite la société utilise la ressource renouvelable. $\bar{t}$ est la solution de l'équation :

$$\int_0^t s_\tau^m d\tau = S_0.$$

Lorsque S_0 tend vers la valeur critique S_0^m, $\bar{t}$ tend vers $+\infty$.

C. Le délai $\bar{h}$ est inférieur au délai T_r

Lorsque $\bar{h} < T_r$ les sentiers optimaux sont un peu plus complexes pour certaines valeurs intermédiaires de S_0. Il convient de distinguer ici trois valeurs critiques du montant des réserves initiales qu'on note S_0^a, S_0^b et $S_0^2, 0 < S_0^a < S_0^b < S_0^2$.

Le stock S_0^a est celui qui permet d'exploiter la ressource non renouvelable sur l'intervalle $[0, \bar{h})$ en n'utilisant que le travail qui reste après exploitation de la totalité de la ressource renouvelable :

$$S_0^a = \int_0^{\bar{h}} \bar{s}_t dt.$$

Le seuil S_0^b correspond au stock dont la société doit disposer si, sur l'intervalle $[0, T_r - \bar{h})$, elle affecte la totalité du travail à l'exploitation de la seule ressource non renouvelable et si, sur l'intervalle $[T_r - \bar{h}, T_r)$ elle n'exploite la ressource non renouvelable qu'avec le seul travail restant après exploitation de la totalité des disponibilités en ressource renouvelable :

$$S_0^b = \int_0^{T_t - \bar{h}} s_t^m dt + \int_{T_r - \bar{h}}^{T_r} \bar{s}_t dt.$$

Enfin la valeur critique S_0^2 est celle qu'on a définie au paragraphe A supra.

a- Cas $S_0 < S_0^a, S_0^b < S_0 < S_0^2$ et $S_0^2 < S_0 < S_0^m$

Ces trois cas sont ceux dans lesquels la politique optimale a la même structure que lorsque $\bar{h} > T_r$, selon le tableau de correspondance suivant.

$\bar{h} > T_r$		$\bar{h} < T_r$
$S_0 < S_0^1$	$\Leftrightarrow$	$S_0 < S_0^a$
$S_0^1 < S_0 < S_0^2$	$\Leftrightarrow$	$S_0^b < S_0 < S_0^2$
$S_0^2 < S_0 < S_0^m$	$\Leftrightarrow$	$S_0^2 < S_0 < S_0^m$

Tableau 1 Correspondance entre types de sentiers optimaux des cas $\bar{h} > T_r$ et $\bar{h} < T_r$

b- Cas $S_0^a < S_0 < S_0^b$

La politique optimale comprend ici quatre phases. Au cours d'une première phase $[0, \bar{t}), \bar{t} < T_r - \bar{h}$, la société affecte la totalité du travail disponible à l'exploitation de la ressource non renouvelable ; au cours d'une seconde phase $[\bar{t}, \bar{t} + \bar{h})$ la société exploite la totalité de la ressource renouvelable, le travail restant étant consacré à l'exploitation de la ressource non renouvelable qui est alors épuisée ; au cours de la troisième phase $[\bar{t} + \bar{h}, T_r)$ la société n'exploite que la ressource renouvelable, exploitation qui ne mobilise pas la totalité du travail disponible ; au cours de la dernière phase $[T_r, +\infty)$ la totalité du travail est affectée à l'exploitation de la ressource renouvelable.

La date $\bar{t}$ à laquelle on passe de la première à la seconde phase est la solution de l'équation :

$$\int_0^t s_\tau^m d\tau + \int_t^{t+\bar{h}} \bar{s}_\tau d\tau = S_0.$$

Lorsque S_0 tend vers $S_0^a, \bar{t}$ tend vers 0 ; lorsque S_0 tend vers $S_0^b, \bar{t} + \bar{h}$ tend vers T_r.

Le type de sentier de consommation correspondant à cette politique est illustré à la Figure 3 ci-dessous.

Figure 3

5.2.2 Le taux d'escompte social est relativement faible : $\rho < b_e$

A. Condition d'arbitrage sur l'intervalle $[0, T_r)$

Puisque le taux d'escompte social est relativement faible la société aurait tendance à vouloir attendre que la productivité de la ressource non renouvelable soit suffisamment élevée pour être capable de suivre un régime de consommation stationnaire maximale $c_t = A_e, t \geq 0$, avant d'utiliser la ressource non renouvelable.

Mais considérons une date $t < T_r$ à laquelle la société n'utiliserait que la ressource renouvelable de sorte que $\ell_{rt} \leq \bar{\ell}_{rt} < 1$ et une date $t+h, h > 0$, à laquelle la totalité du travail disponible est employée à exploiter la ressource non renouvelable, et éventuellement la ressource renouvelable mais pas en totalité : $\ell_{e,t+h} + \ell_{r,t+h} = 1$ et $\ell_{r,t+h} < \bar{\ell}_{r,t+h}$. Soit ds une réduction de l'utilisation de la ressource non renouvelable à la date $t+h$ permettant de produire à partir de cette ressource à la date t.

La perte d'utilité actualisée due à la réduction de l'utilisation de la ressource non renouvelable en $t+h$, partiellement compensée par un recours accru à la ressource renouvelable, s'élève à :

$$-e^{-\rho(t+h)}[1 - A_r A_e^{-1}]B_{e,t+h}ds = -e^{-\rho t}[1 - A_r A_e^{-1}]B_{et}e^{-(\rho-b_e)h}ds.$$

Le gain d'utilité actualisée permis par l'utilisation de ressource ds à la date t, qui n'implique pas qu'on réduise l'utilisation de la ressource renouvelable, s'élève à :

$$e^{-\rho t}B_{et}ds$$

Le gain net est donc le suivant :

$$[1 - (1 - A_r A_e^{-1})e^{-(\rho-b_e)h}]B_{et}e^{-\rho t}ds.$$

Ce bilan est positif si $h < \hat{h}$ où $\hat{h}$ est la valeur de h qui annule le terme entre crochets dans l'expression précédente :

$$\hat{h} = -(b_e - \rho)log(1 - A_r A_e^{-1}).$$

Distinguons selon que $\hat{h}$ est supérieur ou inférieur à T_r.

B. Le délai $\hat{h}$ est supérieur au délai T_r

On doit définir ici trois niveaux critiques des réserves initiales que l'on note S_0', S_O'' et $S_0''', S_0' < S_0'' < S_0'''$, qui bornent des intervalles à l'intérieur desquels la politique optimale est d'un type particulier.

Le seuil S_0' est le stock dont devrait disposer la société si, n'ayant pas utilisé la ressource non renouvelable jusqu'à l'instant $T_r + \hat{h}$, elle peut à partir de cette date affecter la totalité du travail disponible à l'exploitation de cette seule ressource :

$$S_0' = \int_{T_r+\hat{h}}^{+\infty} s_t^m dt = b_e^{-1} A_e B_{e0}^{-1} e^{-b_e(T_r+\hat{h})}.$$

Le second seuil S_0'' est le stock que la société doit initialement posséder si sur l'intervalle $[0, T_r)$ elle utilise la totalité de la ressource renouvelable et affecte le reste du travail disponible à l'exploitation de la ressource non renouvelable, sur l'intervalle $[T_r, \hat{h})$ elle affecte la totalité du travail à l'exploitation de la seule ressource renouvelable et enfin au-delà de $\hat{h}$, à l'exploitation de la seule ressource non renouvelable :

$$S_0'' = \int_0^{T} \bar{s}_t dt + \int_{\hat{h}}^{+\infty} s_t^m dt = S_0^1 + b_e^{-1} A_e B_{e0}^{-1} e^{-b_e \hat{h}},$$

où S_0^1 est le montant des réserves initiales défini au paragraphe 5.2.1, alinéa B.

Enfin le seuil S_0''' est le stock que la société doit détenir pour suivre une politique qui ne diffère de la précédente que par la date, ici T_r, à laquelle commence la phase d'affectation de la totalité de l'offre de travail à la seule exploitation de la ressource non renouvelable :

$$S_0''' = \int_0^{T_r} \bar{s}_t dt + \int_{T_r}^{+\infty} s_t^m dt = S_0^1 + b_e^{-1} A_e B_{e0}^{-1} e^{-b_e T_r}.$$

a- Cas $S_0 < S_0'$

Dans ce cas il existe une date $\underline{t} > T_r + \hat{h}$ à partir de laquelle la société peut suivre indéfiniment le sentier de consommation maximum $c_t = A_e, t \geq \underline{t}$. Cette date $\underline{t}$ est la solution de l'équation :

$$b_e^{-1} A_e B_{e0}^{-1} e^{-b_e t} = S_0.$$

La politique optimale consiste à exploiter au maximum la seule ressource renouvelable jusqu'à la date $T_r + \hat{h}$, puis la seule ressource non renouvelable.

Lorsque S_0 tend vers $0, \underline{t}$ tend vers $+\infty$ et lorsque S_0 tend vers $S_0', \underline{t}$ tend vers $T_r + \hat{h}$.

Le sentier de consommation optimal est illustré à la Figure 4 ci-dessous.

On remarquera que, puisque $\underline{t} - T_r > \hat{h}$, le bilan d'une substitution du type de celle examinée au point A ci-dessus, serait négatif. On vérifie aisément que le long d'un tel sentier, il n'y a aucune opportunité d'arbitrage à saisir.

Figure 4

b- Cas $S_0' < S_0 < S_0''$

Dans ce cas il existe une date $\underline{t}, \hat{h} < \underline{t} < \underline{T}_r + \hat{h}$, telle que la société doit, sur l'intervalle $[\underline{t} - \hat{h}, T_r)$, affecter à l'exploitation de la ressource non renouvelable cette partie de la population active qui n'est pas occupée par l'exploitation de la totalité de la ressource renouvelable et, à partir de la date $\underline{t}$, affecter en permanence la totalité de l'offre de travail à l'exploitation de la seule ressource non renouvelable. La date $\underline{t}$ est la solution de l'équation :

$$\int_{t-\hat{h}}^{T_r} \bar{s}_\tau d\tau + \int_t^{+\infty} s_\tau^m d\tau = S_0 \Leftrightarrow \int_{t-\hat{h}}^{T_r} \bar{s}_\tau d\tau + b_e^{-1} A_e B_{e0}^{-1} e^{-b_e t} = S_0$$

Lorsque S_0 tend vers $S_0', \underline{t}$ tend vers $T_r + \hat{h}$ et lorsque S_0 tend vers $S_0'', \underline{t}$ tend vers $\hat{h}$.

Le sentier optimal de consommation est illustré à la Figure 5 ci-dessous.

Figure 5

c- Cas $S_0'' < S_0 < S_0'''$

Dans ce cas il existe une date $\underline{t}, T_r < \underline{t} < \hat{h}$, telle que sur l'intervalle $[0, T_r)$ la société consacre cette partie de l'offre de travail qui reste disponible après exploitation de la totalité de la ressource renouvelable, à l'exploitation de la ressource non renouvelable et affecte à partir de la date $\underline{t}$ la totalité de la force de travail à l'exploitation de la seule ressource non renouvelable. La date $\underline{t}$ est ici la solution de l'équation :

$$\int_0^{T_\tau} \bar{s}_\tau d\tau + \int_t^{+\infty} s_\tau^m d\tau = S_0 \Leftrightarrow b_e^{-1} A_e B_{e0}^{-1} e^{-b_e t} = S_0 - S_0^1.$$

Lorsque S_0 tend vers $S_0'', \underline{t}$ tend vers $\hat{h}$ et lorsque S_0 tend vers $S_0''', \underline{t}$ tend vers T_r.

Le sentier de consommation optimale est illustré à la Figure 6.

Figure 6

d- Cas $S_0''' < S_0 < S_0^m$

Il existe maintenant une date $t_e < T_r$ telle que la société, sur l'intervalle $[0, t_e)$, consacre cette part de l'offre de travail qui reste après exploitation de la totalité de la ressource renouvelable, à l'exploitation de la ressource non renouvelable et à partir de t_e utilise tout le travail disponible pour exploiter la seule ressource non renouvelable. La date t_e est la solution de l'équation :

$$\int_0^t \bar{s}_\tau d\tau + \int_t^{+\infty} s_\tau^m d\tau = S_0 \Leftrightarrow \int_0^t \bar{s}_\tau d\tau + b_e^{-1} A_e B_{e0}^{-1} e^{-b_e t} = S_0.$$

Lorsque S_0 tend vers S_0''', t_e tend vers T_r et lorsque S_0 tend vers S_0^m, t_e tend vers 0.

C. Le délai $\hat{h}$ est inférieur au délai T_r

Lorsque $\hat{h} < T_r$ il convient de distinguer trois seuils critiques : S_0' défini comme en B ci-dessus et deux autres seuils que l'on note S_0^β et $S_0^\gamma, S_0' < S_0^\beta < S_0^\gamma$.

Le seuil S_0^β est le stock nécessaire pour que la main d'oeuvre qui n'est pas mobilisée par l'exploitation de la totalité de la ressource renouvelable puisse être affectée à l'exploitation de la ressource non renouvelable sur l'intervalle $[T_r - \hat{h}, T_r)$ et pour qu'au-delà de T_r, la totalité de la main d'oeuvre disponible puisse être affectée en permanence à cette exploitation :

$$S_0^\beta = \int_{T_r - \hat{h}}^{T_r} \bar{s}_t dt + \int_{T_r}^{+\infty} s_t^m dt.$$

Le seuil S_0^γ correspond aux réserves que la société doit posséder pour que la ressource non renouvelable soit exploitée sur l'intervalle $[0, \hat{h})$ par la main d'oeuvre en excédent de ce qui est requis pour exploiter la seule ressource renouvelable et au-delà de $\hat{h}$ par la totalité de la main d'oeuvre :

$$S_0^\gamma = \int_0^{\hat{h}} \bar{s}_t dt + \int_{\hat{h}}^{+\infty} s_t^m dt.$$

Les politiques optimales sont ici les mêmes que dans le cas $\hat{h} > T_r$, à l'exception de celle illustrée à la Figure 6 qui ne peut apparaître que si $\hat{h} > T_r$ et il existe un nouveau type de politique spécifique au cas $\hat{h} < T_r$

a- Cas $S_0 < S_0', S_0' < S_0 < S_0^\beta$ et $S_0^\gamma < S_0 < S_0^m$

A ces trois intervalles de stocks initiaux correspondent trois des quatre politiques qui sont déjà apparues dans le cas $\hat{h} > T_r$ selon le tableau de correspondance suivant.

$\hat{h} < T_r$		$\hat{h} > T_r$
$S_0 < S_0'$	$\Leftrightarrow$	$S_0 < S_0'$
$S_0' < S_0 < S_0^\beta$	$\Leftrightarrow$	$S_0' < S_0 < S_0''$
$S_0^\gamma < S_0 < S_0^m$	$\Leftrightarrow$	$S_0''' < S_0 < S_0^m$

Tableau 2 correspondance entre types de sentiers optimaux des cas $\hat{h} > T_r$ et $\hat{h} < T_r$

b- Cas $S_0^\beta < S_0 < S_0^\gamma$

Il existe dans ce cas une date $\underline{t}, \hat{h} < \underline{t} < T_r$, telle que la société peut, sur l'intervalle $[\underline{t} - \hat{h}, \underline{t})$, affecter à l'exploitation de la ressource non renouvelable cette partie de la population active que n'est pas occupée à exploiter la totalité de la ressource renouvelable et à partir de la date $\underline{t}$ affecter la totalité de l'offre de travail à l'exploitation de la seule ressource non renouvelable. La date $\underline{t}$ est la solution de l'équation :

$$\int_{t-\hat{h}}^{t} \bar{s}_\tau d\tau + \int_{t}^{+\infty} s_\tau^m d\tau = S_0.$$

Lorsque S_0 tend vers $S_0^\beta, \underline{t}$ tend vers T_r et lorsque S_0 tend vers $S_0^\gamma, \underline{t}$ tend vers $\hat{h}$.

Figure 7

6 Conclusion

L'étude a permis de préciser la nature des politiques optimales d'exploitation d'une ressource non renouvelable et d'une ressource renouvelable disponible sous la forme d'un flux limité, lorsque les productivités de ces différentes ressources augmentent au cours du temps selon une tendance exogène.

Dans le cas où la productivité du travail est plus élevée dans le secteur qui utilise la ressource renouvelable, la politique optimale est facile à déterminer.Il est évidemment optimal d'affecter la totalité de la main d'oeuvre disponible à ce secteur si la ressource renouvelable est abondante. Si, au contraire, cette ressource est initialement rare, il convient de mobiliser la ressource épuisable. Selon le signe de la différence entre le taux de préférence pour le présent et le taux de progrès technique dans le secteur qui emploie la ressource épuisable, l'exploitation de la ressource non renouvelable peut soit être entreprise dès l'instant initial, soit retardée, son épuisement devant intervenir au plus tard à la date où le progrès technique dans le secteur de la ressource renouvelable permet de surmonter la rareté initiale de cette ressource.

Lorsque le secteur employant la ressource épuisable bénéficie initialement de la productivité du travail la plus élevée, la politique optimale de mobilisation des ressources naturelles est beaucoup plus complexe, tout spécialement dans le cas où le flux renouvelable est initialement rare, situation la plus intéressante à étudier d'un point de vue économique. Cette politique optimale va généralement dépendre du taux de l'impatience, du montant des réserves initiales de ressource épuisable, du flux disponible de ressource renouvelable ainsi que des trajectoires du progrès technique dans les deux secteurs.

La société doit en effet effectuer dans ce cas un double arbitrage intertemporel. Le premier porte sur le choix du type de ressource à consommer en priorité. Le second arbitrage résulte des contraintes de mobilisation du travail dans les deux secteurs de l'économie. Si l'affectation de la fraction de la main d'oeuvre non mobilisée par le secteur utilisant la ressource épuisable, au secteur utilisant la ressource renouvelable, n'entraîne pas l'usage de la totalité du flux disponible de cette ressource, la société peut avoir intérêt à épargner momentanément la ressource épuisable en consommant davantage de l'autre ressource. L'usage futur de la partie épargnée de la ressource non renouvelable permettra d'accroître la consommation lorsque la contrainte de disponibilité du flux de ressource sera saturée ultérieurement. Il est clair que cette opportunité dépend crucialement du montant des réserves initiales de ressource non renouvelable.

On montre ainsi que la combinaison des deux logiques d'arbitrage préalablement décrites peut entraîner, pour certains niveaux des réserves initiales, d'une part la possibilité d'une exploitation simultanée des deux ressources, bien que leur coûts moyens en travail soient différents, et d'autre part, un fractionnement, sur plusieurs périodes distinctes, de l'exploitation de la ressource non renouvelable.

Plusieurs extensions de notre modèle semblent intéressantes. La plus évidente consisterait à endogéneiser le progrès technique, permettant ainsi d'introduire dans l'analyse la possibilité de stratégies de R&D spécifiquement dédiées à l'amélioration de la productivité de chacune des ressources. On trouvera dans Amigues, Long et Moreaux (2003) les premiers éléments d'analyse de cette question. Par ailleurs, si le choix de technologies de type Leontief a l'avantage de mieux mettre en évidence les facteurs qui conditionnent les politiques optimales de substitution entre les ressources, des hypothèses technologiques plus générales permettraient d'étendre l'éventail des substitutions possibles à la main d'oeuvre employée pour l'exploitation des ressources naturelles. Cette question a fait l'objet d'une première étude (Amigues, Moreaux, Grimaud, 2004) dans le contexte d'un modèle de progrès technique endogène avec un seul secteur d'exploitation d'une ressource non renouvelable.

Appendices

A.1 Les politiques optimales en l'absence de substitut renouvelable

En l'absence de substitut renouvelable le problème du planificateur est le problème $(P.E.)$ suivant :

$$\text{(P.E.)} \quad \max_{\{\ell_{et},t\geq 0\}} \quad \int_0^{+\infty} A_e \ell_{et} e^{-\rho t} dt \tag{A.1.1}$$

$$\dot{S}_t = -A_e B_{et}^{-1} \ell_{et}, S_0 \text{ donné }, S_t \geq 0, \qquad t \geq 0 \tag{A.1.2}$$

$$\dot{B}_{et} = b_e B_{et}, \qquad t \geq 0 \tag{A.1.3}$$

$$1 - \ell_{et} \geq 0 \ \text{ et } \ell_{et} \geq 0 \qquad t \geq 0 \tag{A.1.4}$$

Soit LE_t le lagrangien du problème :

$$LE_t = A_e \ell_{et} e^{-\rho t} - \lambda_t A_e B_{et}^{-1} + \omega_t[1 - \ell_{et}] + \gamma_{et} \ell_{et}.$$

Posons $\bar{\omega}_t = \omega_t A_e^{-1}$ et $\bar{\mu}_{et} = \mu_{et} A_e^{-1}$, tenons compte du fait que $\lambda_t = \lambda = cte$ et remplaçons B_{et}^{-1} par sa valeur $B_{e0}^{-1} e^{-b_e t}$. Les conditions de premier ordre ont pour expression :

$$e^{-\rho t} = \lambda B_{e0}^{-1} e^{-b_e t} + \bar{\omega}_t - \bar{\mu}_{et} \tag{A.1.5}$$

$$\bar{\omega}_t \geq 0, 1 - \ell_{et} \geq 0 \text{ et } \bar{\omega}_t[1 - \ell_{et}] = 0 \tag{A.1.6}$$

$$\bar{\mu}_{et} \geq 0, \ell_{et} \geq 0 \text{ et } \bar{\mu}_{et} \ell_{et} = 0 \tag{A.1.7}$$

et la condition de transversalité est :

$$\lim_{t \uparrow +\infty} \lambda S_t = 0 \tag{A.1.8}$$

Les conditions de premier ordre sont vérifiées par :

$$\begin{array}{ll}
\ell_{et} = 1 \ , \ \bar{\omega}_t = e^{-\rho t} - \lambda B_{e0}^{-1} e^{-b_e t} \text{ et } \bar{\mu}_{et} = 0 & , \text{ si } e^{-\rho t} > \lambda B_{e0}^{-1} e^{-b_e t} \\
\ell_{et} \in [0,1], \bar{\omega}_t = 0 \text{ et } \bar{\mu}_{et} = 0 & , \text{ si } e^{-\rho t} = \lambda B_{e0}^{-1} e^{-b_e t} \\
\ell_{et} = 1, \bar{\omega}_t = 0 \text{ et } \bar{\mu}_{et} = \lambda B_{e0}^{-1} e^{-b_e t} - e^{-\rho t} & , \text{ si } e^{-\rho t} < \lambda B_{e0}^{-1} e^{-b_e t}
\end{array}$$

Remarquons maintenant que si $\lambda = B_{e0}$, le premier terme du membre droit de la condition (A.1.5) s'écrit $e^{-b_e t}$, de sorte que :

$$\begin{array}{llll}
\rho > b_e & \Rightarrow & e^{-\rho t} < e^{-b_e t} & , \ t > 0 \\
\rho = b_e & \Rightarrow & e^{-\rho t} = e^{-b_e t} & , \ t \geq 0
\end{array}$$

$$\rho < b_e \qquad \Rightarrow \qquad e^{-\rho t} > e^{-b_e t} \qquad , \ t > 0$$

Considérons successivement les cas $\rho > b_e$ et $b_e > \rho$.

Cas $\rho > b_e$

Si $\rho > b_e$ la condition nécessaire pour qu'il existe un intervalle de temps au cours duquel $e^{-\rho t} > \lambda B_{e0}^{-1} = e^{-b_e t}$ est que $\lambda < B_{e0}$. A toute valeur de $\lambda < B_{e0}$ on peut associer la date $\bar{t}(\lambda)$ solution de l'équation :

$$e^{-\rho t} = \lambda B_{e0}^{-1} e^{-b_e t},$$

et on peut associer le stock de ressource $\hat{S}_0(\lambda)$ qui permet de suivre la politique $\ell_{et} = 1$, i.e. $c_t = A_e$, sur l'intervalle de temps $[0, \bar{t}(\lambda))$:

$$\hat{S}_0(\lambda) = \underline{S}_{0\bar{t}(\lambda)}(A_e).$$

Il est clair que :

$$d\bar{t}(\lambda)/d\lambda < 0, \lim_{\lambda \uparrow B_e 0} \bar{t}(\lambda) = 0 \text{ et } \lim_{\lambda \downarrow 0} \bar{t}(\lambda) = 0.$$

Il en résulte (cf sous-section 3.1) que :

$$d\hat{S}_0/d\lambda < 0, \hat{S}_0(B_{e0}) = 0 \text{ et } \lim_{\lambda \downarrow 0} \hat{S}_0(\lambda) = b_e^{-1} A_e B_{e0}^{-1} = S_0^m,$$

et donc, pour tout $S_0 < S_0^m$, l'équation :

$$\hat{S}_0(\lambda) = S_0$$

a une solution unique λ^*, valeur imputée de la ressource à l'optimum.

On remarquera que λ^* vérifie la relation :

$$e^{-\rho \bar{t}^*} = \lambda^* B_{e0}^{-1} e^{-b_e \bar{t}^*}$$

où $\bar{t}^* = \bar{t}(\lambda^*)$, et donc :

$$\lambda^* = B_{e0} e^{-(\rho - b_e)\bar{t}^*}.$$

Si le niveau des réserves initiales S_0 s'accroisserait d'un montant dS_0 la société pourrait prolonger la durée de la période $[0, \bar{t}^*)$ pendant laquelle elle consomme la quantité de bien de consommation $c_t = A_e$, d'un intervalle de temps additionnel $d\bar{t}^*$ tel que :

$$A_e d\bar{t}^* \simeq B_{e0} e^{b_e \bar{t}^*} dS_0 \quad \Rightarrow \quad dt^*/dS_0 = A_e^{-1} B_{e0} e^{b_e \bar{t}^*},$$

de sorte que l'accroissement d'utilité actualisé est, au premier ordre, égal à :

$$e^{-\rho\bar{t}^*}A_e(d\bar{t}^*/dS_0)dS_0 = B_{e0}e^{-(\rho-b_e)\bar{t}^*}dS_0 = \lambda^* dS_0.$$

Lorsque $S_0 \geq S_0^m$, la société peut consommer en permanence $c_t = A_e, t \geq 0$, et $\ell_{et}^* = 1, t \geq 0$, ce qui ne peut être la solution des conditions de premier ordre que si $\lambda^* = 0$. En effet, si $S_0 \geq S_0^m$, un accroissement $dS_0 > 0$ du montant des réserves initiales n'a aucune valeur : la totalité du travail disponible est déjà utilisée à tout instant et l'accroissement dS_0 n'est pas transformable en bien de consommation.

Cas $\rho < b_e$

Si $\rho < b_e$ la condition nécessaire pour qu'il existe un intervalle de temps au cours duquel $e^{-\rho t} > \lambda B_{e0}^{-1}e^{-b_e t}$ est que $\lambda > B_{e0}$. A toute valeur de $\lambda > B_{e0}$ on peut associer la date $\underline{t}(\lambda)$ solution de l'équation :

$$e^{-\rho t} = \lambda B_{e0}^{-1}e^{-b_e t}$$

ainsi qu'un stock initial de ressource $\tilde{S}_0(\lambda)$ qui permet de suivre la politique $\ell_{et} = 1$ sur l'intervalle de temps $[\underline{t}(\lambda), +\infty)$:

$$\tilde{S}_0(\lambda) = \underline{S}_{\underline{t}(\lambda),\infty}(A_e).$$

Il est clair que :

$$d\underline{t}(\lambda)/d\lambda < 0, \lim_{\lambda \downarrow B_{e0}} \underline{t}(\lambda) = 0 \text{ et } \lim_{\lambda \uparrow +\infty} \underline{t}(\lambda) = +\infty,$$

et donc pour tout $S_0 < S_0^m$, l'équation :

$$\tilde{S}_0(\lambda) = S_0$$

a une solution unique λ^*, valeur marginale imputée de la ressource à l'optimum.

On notera qu'en $S_0 = S_0^m$ stricto sensu la valeur imputée de la ressource n'est pas définie. Pour toute valeur de λ inférieure ou égale B_{e0} les conditions de premier ordre (A.1.5)-(A.1.7) peuvent être satisfaites, la valeur de μ_t dépendant de la valeur choisie de λ. En fait pour $S_0 = S_0^m$, la valeur marginale de la ressource n'est pas définie. Un accroissement dS_0 des réserves initiales est sans effet sur la valeur optimisée de la fonction d'objectif puisque la totalité du travail est déjà employée à tout instant. Mais une réduction $-dS_0 < 0$ de ces réserves initiales a pour effet une réduction d'un montant $-B_{e0}dS_0$ de la valeur optimisée de la fonction d'objectif.

En tant que fonction de S_0, λ^* est une fonction décroissante sur l'intervalle $(0, S_0^m)$, en $S_0 = S_0^m$ elle fait un saut vers le bas de B_{e0} à 0, et elle identiquement nulle sur l'intervalle $(S_0^m, +\infty)$.

A.2 Les politiques optimales en présence d'un substitut renouvelable moins coûteux en travail : $A_r > A_e$

Le problème du planificateur se pose ici comme un problème d'utilisation au mieux du stock initial de ressource non renouvelable sur l'intervalle $[0, T_r]$ sachant que la ressource renouvelable est exploitée au maximum. Soit $(P.R)$ ce problème :

$$\text{(P.R.)} \quad \max_{\{\ell_{et}, t\in[0,T_r]\}} \quad \int_0^{T_r} [A_e\ell_{et} + A_r\ell_{rt}]e^{-\rho t}dt \tag{A.2.1}$$

$$\dot{S}_t = -A_e B_{et}^{-1}\ell_{et}, S_0 \text{ donné }, S_t \geq 0, \quad t \in [0, T_r] \tag{A.2.2}$$

$$\dot{B}_{et} = b_e B_{et}, B_{e0} \text{ donné} \qquad t \in [0, T_r] \tag{A.2.3}$$

$$\bar{\ell}_{et} - \ell_{et} \geq 0 \text{ et } \ell_{et} \geq 0 \qquad t \in [0, T_r] \tag{A.2.4}$$

Notons LR_t le lagrangien de ce problème :

$$LR_t = [A_e\ell_{et} + A_r\bar{\ell}_{rt}]e^{-\rho t} - \lambda_t A_e B_{et}^{-1}\ell_{et} + \mu_t[\bar{\ell}_{et} - \ell_{et}] + \gamma_{et}\ell_{et}.$$

Les conditions de premier ordre du problème sont, en posant $\bar{\mu}_t = \mu_t A_e^{-1}$ et $\bar{\gamma}_{et} = \gamma_{et}A_e^{-1}$, en tenant compte du fait que $\lambda_t = \lambda = cte$, et en remplaçant B_{et} par sa valeur $B_{e0}e^{b_e t}$:

$$e^{-\rho t} = \lambda B_{e0}^{-1}e^{-b_e t} + \bar{\mu}_t - \bar{\gamma}_{et} \tag{A.2.5}$$

$$\bar{\mu}_t \geq 0, \bar{\ell}_{et} - \ell_t \geq 0 \text{ et } \bar{\mu}_t[\bar{\ell}_{et} - \ell_{et}] \tag{A.2.6}$$

$$\bar{\gamma}_{et} \geq 0, \ell_{et} \geq 0 \text{ et } \bar{\gamma}_{et}\ell_{et} = 0 \tag{A.2.7}$$

et la condition de transversalité est :

$$lim_{t\uparrow T_r}\lambda S_t = 0 \tag{A.2.8}$$

Excepté le fait que la valeur maximale de ℓ_{et} est ici $\bar{\ell}_{et}$ et non par 1, et l'horizon de planification est T_r et non pas $+\infty$, l'ensemble des conditions (A.2.5)-(A.2.8) est semblable à l'ensemble des conditions (A.1.1)-(A.1.8) du problème $(P.E.)$ étudié à la section A.1 ci-dessus et appelle le même type de solution.

Les conditions de premier ordre (A.2.5.)-(A.2.7) sont vérifiées par :

$$\begin{aligned}
\ell_{et} = \bar{\ell}_{et}, \bar{\mu}_t = e^{-\rho t} - \lambda B_{e0}^{-1}e^{-b_e t} \text{ et } \bar{\gamma}_{et} = 0 \quad &, \text{ si } e^{-\rho t} > \lambda B_{e0}^{-1}e^{-b_e t} \\
\ell_{et} \in [0, 1], \bar{\mu}_t = 0 \text{ et } \bar{\gamma}_{et} = 0 \quad &, \text{ si } e^{-\rho t} = \lambda B_{e0}^{-1}e^{-b_e t} \\
\ell_{et} = 0, \bar{\mu}_t = 0 \text{ et } \bar{\gamma}_{et} = \lambda B_{e0}^{-1}e^{b_e t} - e^{-\rho t} \quad &, \text{ si } e^{-\rho t} < \lambda B_{e0}^{-1}e^{-b_e t}
\end{aligned}$$

Partons de la remarque suivante :

$$\lambda = B_{e0} \Rightarrow \{\rho >, =, < b_e \Rightarrow e^{-\rho t} <, =, > e^{-b_e t}, t > 0\}$$

et considérons successivement les cas $\rho > b_e$ et $\rho < b_e$.

<u>Cas $\rho > b_e$</u>

Si $\rho > b_e$ la condition nécessaire pour qu'il existe un intervalle de temps au cours duquel $e^{-\rho t} > \lambda B_{e0}^{-1} e^{-b_e t}$ est que $\lambda < B_{e0}$. A toute valeur $\lambda < B_{e0}$ associons la date $\bar{t}(\lambda)$ solution de l'équation :

$$e^{-\rho t} = \lambda B_{e0}^{-1} e^{-b_e t}.$$

Il est clair que :

$$d\bar{t}(\lambda)/d\lambda < 0 \text{ et } lim_{\lambda \uparrow B_{e0}} \bar{t}(\lambda) = 0.$$

Convenons de noter $\underline{\lambda}$ la valeur de λ pour laquelle $\bar{t}(\lambda) = T_r$.

A tout $\lambda \in (\underline{\lambda}, B_{e0}]$ associons le stock $\bar{S}_0(\lambda)$ qui permet de suivre la politique $\ell_{et} = \bar{\ell}_{et}$, i.e. $c_t = A_e \bar{\ell}_{et} + A_r \bar{\ell}_{rt}$, sur l'intervalle de temps $[0, \bar{t}(\lambda))$:

$$\bar{S}_0(\lambda) = \int_0^{\bar{t}(\lambda)} \bar{s}_t dt = \bar{S}_{0\bar{t}(\lambda)}.$$

On a :

$$d\bar{S}_0(\lambda)/d\lambda < 0, lim_{\lambda \uparrow B_{e0}} \bar{S}_0(\lambda) = 0 \text{ et } lim_{\lambda \downarrow \underline{\lambda}} \bar{S}_0(\lambda) = \bar{S}_{0T_r},$$

et donc, pour tout $S_0 < \bar{S}_{0T_r}$, l'équation :

$$\bar{S}_0(\lambda) = S_0$$

a une solution unique λ^*, valeur imputée de la ressource à l'optimum.

Comme dans le cas $S_0 = S_0^m$ en l'absence de substitut renouvelable, ici lorsque $S_0 = \bar{S}_{0T_r}$, la valeur imputée de la ressource n'est pas définie : une légère réduction $-dS_0 < 0$ du stock initial a pour effet une réduction $-\underline{\lambda} dS_0$ de la valeur optimisée de la fonction d'objectif tandis qu'une légère augmentation $dS_0 > 0$ de ce stock n'implique aucune variation de cette valeur optimisée.

En tant que fonction de S_0, λ^* est une fonction décroissante sur l'intervalle $[0, \bar{S}_{0T_r})$, en $S_0 = \bar{S}_{0T_r}$ elle fait un saut vers le bas de $\underline{\lambda}$ à 0, et elle identiquement nulle sur l'intervalle $(\bar{S}_{0T_r}, +\infty)$.

<u>Cas $\rho < b_e$</u>

Si $\rho < b_e$ la condition nécessaire pour qu'il existe un intervalle de temps au cours duquel $e^{-\rho t} > \lambda B_{e0}^{-1} e^{-b_e t}$ est que $\lambda > B_{e0}$. A toute valeur $\lambda > B_{e0}$ associons la date $\underline{t}(\lambda)$ solution de l'équation :

$$e^{-\rho t} = \lambda B_{e0}^{-1} e^{-b_e t}$$

Il est clair que :

$$d\underline{t}(\lambda)/d\lambda < 0 \text{ et } lim_{\lambda \downarrow b_{e0}} \underline{t}(\lambda) = 0$$

Convenons de noter $\bar{\lambda}$ la valeur de λ pour laquelle $\underline{t}(\lambda) = T_r$.

A tout $\lambda \in [B_{e0}, \bar{\lambda})$ associons le stock de ressource $\hat{S}_0(\lambda)$ permettant de suivre la politique $\ell_{et} = \bar{\ell}_{et}$ sur l'intervalle de temps $[\underline{t}(\lambda), T_r)$:

$$\hat{S}_0(\lambda) = \int_{\underline{t}(\lambda)}^{T_r} \bar{s}_t dt = \bar{S}_{\underline{t}(\lambda), T_r}.$$

On a :

$$d\hat{S}_0(\lambda)/d\lambda < 0, lim_{\lambda \downarrow B_{e0}} \hat{S}(\lambda) = 0 \text{ et } lim_{\lambda \uparrow \bar{\lambda}} \hat{S}_0(\lambda) = \bar{S}_{0,T_r},$$

et donc, pour tout $S_0 < \bar{S}_{0,T_r}$, l'équation :

$$\hat{S}_0(\lambda) = S_0,$$

a une solution unique λ^*, valeur imputée de la ressource.

Ici encore lorsque $S_0 = \bar{S}_{0T_r}$ la valeur imputée de la ressource n'est pas définie. Une légère réduction $-dS_0$ du stock initial implique une baisse de la valeur optimisée de la fonction d'objectif d'un montant $-B_{e0}dS_0$, alors qu'un léger accroissement n'a aucun effet.

En tant que fonction de S_0, λ^* est une fonction décroissante sur l'intervalle $[0, \bar{S}_{0T_r})$, en $S_0 = S_{0T_r}$ elle fait un saut vers le bas de B_{e0} à 0 ; elle est enfin identiquement nulle sur l'intervalle $(\bar{S}_{0T_r}, +\infty)$.

A.3 Les politiques optimales en présence d'un substitut renouvelable plus coûteux en travail : $A_e > A_r$

La démonstration de l'existence de prix imputés pour lesquels les conditions de premier ordre (2.7)-(2.14) sont satisfaites est ici un peu plus complexe que dans les cas précédents. Il est exclu qu'on traite l'ensemble des cas et sous-cas recensés à la section 5. On montre comment procéder dans un cas exemplaire, le cas $\rho < b_e, \hat{h} > T_r$ et $S_0''' > S_0 > S_0'$, dont le sentier de consommation optimal est illustré à la Figure 5.

On recense d'abord les formes particulières que prennent les conditions de premier ordre au cours des quatre phases qui composent le sentier illustré à la Figure 5. On montre ensuite qu'il existe des trajectoires des variables duales qui satisfont ces conditions.

A.3.1 Formes prises par les conditions de premier ordre au cours des quatre phases de la politique optimale

Considérons les quatre phases successives $[0, \underline{t}-\hat{h})$, $[\underline{t}-\hat{h}, T_r)$, $[T_r, \underline{t})$ et $[\underline{t}, +\infty)$ de la politique optimale.

a.) Sur l'intervalle $[0, \underline{t} - \hat{h})$ on a $\ell_{et} = 0$ et $\ell_{rt} = \bar{\ell}_{rt} = A_r^{-1} B_{rt} \bar{r} \in (0, 1)$ ce qui implique que :

$$\gamma_{rt} = 0 \text{ et } \omega_t = 0. \tag{A.3.1}$$

On déduit alors de (2.8) que :

$$\nu_t = B_{r0} e^{(b_r - \rho)t} > 0. \tag{A.3.2}$$

et de (2.7) que :

$$\gamma_{et} = \lambda A_e B_{et}^{-1} - A_e e^{-\rho t}. \tag{A.3.3}$$

Puisque d'après (2.11), $\gamma_{et} \geq 0$, on doit avoir :

$$B_{e0} e^{(b_e - \rho)t} \leq \lambda \qquad , t \in [0, \underline{t} - \hat{h}).$$

et puisque $b_e - \rho > 0$, il faut que :

$$B_{e0} e^{(b_e - \rho)(\underline{t} - \hat{h})} \leq \lambda. \tag{A.3.4}$$

b.) Sur l'intervalle $[\underline{t} - \hat{h}, T_r)$, on a $\ell_{et} = \bar{\ell}_{et} = 1 - \bar{\ell}_{rt} \in (0, 1)$ et $\ell_{rt} = \bar{\ell}_{rt} \in (0, 1)$, ce qui implique :

$$\gamma_{et} = \gamma_{rt} = 0. \tag{A.3.5}$$

On en déduit alors de (2.7) que :

$$\omega_t = A_e e^{-\rho t} - \lambda A_e B_{et}^{-1}, \tag{A.3.6}$$

d'où, en portant cette valeur dans (2.8) et en tenant compte de (A.3.5) :

$$\lambda = B_{e0} e^{(b_e - \rho)(t - \hat{h})} + \nu_t (A_r B_{rt}^{-1})(A_e^{-1} B_{et}) \qquad , t \in [\underline{t} - \hat{h}, T_r). \tag{A.3.7}$$

c.) Sur l'intervalle $[T_r, \underline{t})$, on a $\ell_{et} = 0$ et $\ell_{rt} = 1$, d'où :

$$\gamma_{rt} = 0, \tag{A.3.8}$$

et la condition (2.8) s'écrit :

$$\omega_t = A_r e^{-\rho t} - \nu_t A_r B_{rt}^{-1}. \tag{A.3.9}$$

Reportons cette valeur dans (2.7). On obtient :

$$\lambda = B_{e0}e^{(b_e-\rho)(t-\hat{h})} + \nu_t(A_r B_{rt}^{-1})(A_e^{-1}B_{et}) + \gamma_{et}A_e^{-1}B_{et}, t \in [T_r, \underline{t}). \quad \text{(A.3.10)}$$

d.) Sur l'intervalle $[\underline{t}, +\infty), \ell_{et} = 1$ et $\ell_{rt} = 0$, d'où :

$$\gamma_{et} = 0. \quad \text{(A.3.11)}$$

et donc (2.7) s'écrit :

$$\omega_t = A_e e^{-\rho t} - \lambda A_e B_{et}^{-1}. \quad \text{(A.3.12)}$$

Portons cette expression dans (2.8) on obtient :

$$\lambda = B_{e0}e^{(b_e-\rho)(t-\hat{h})} + \nu_t(A_r B_{rt}^{-1})(A_e^{-1}B_{et}) - \gamma_{rt}A_e^{-1}B_{et}, t \in [\underline{t}, +\infty). \quad \text{(A.3.13)}$$

L'examen des conditions (A.3.4), (A.3.7),(A.3.10) et (A.3.13) suggère une valeur optimale λ^* de λ égale à :

$$\lambda^* = B_{e0}e^{(b_e-\rho)(\underline{t}-\hat{h})}.$$

A.3.2 Existence de trajectoires des variables duales pour lesquelles les conditions de premier ordre sont satisfaites

Montrons que, si $\lambda = \lambda^*$, il existe des trajectoires des autres variables duales pour lesquelles l'ensemble des conditions de premier ordre sont satisfaites. Considérons les quatre phases successives de la politique optimale.

a.) Sur l'intervalle $[0, \bar{t} - \hat{h}$ la seule condition dont il faut s'assurer qu'elle est satisfaite est la condition (A.3.4), qui l'est trivialement.

b.) Sur l'intervalle $[\bar{t} - \hat{h}, T_r)$, il faut vérifier que ω_t donné par (A.3.6) est non négatif et montrer que ν_t vérifiant (A.3.7) est également non négatif. Considérons d'abord (A.3.6) pour $\lambda = \lambda^*$:

$$\omega_t = A_e e^{-\rho t} - \lambda^* A_e B_{et}^{-1} = A_e e^{-\rho t}[1 - e^{(b_e-\rho)(\underline{t}-t-\hat{h})}],$$

et puisque $b_e > \rho$, $t \in [\underline{t} - \hat{h}, T_r)$, alors $\omega_t \geq 0$. Pour que (A.3.7) soit vérifiée,il faut que :

$$\nu_t(A_r^{-1}B_{rt})(A_e B_{et}^{-1})B_{e0}e^{(b_e-\rho)(\underline{t}-\hat{h})}[1 - e^{t-\underline{t}}],$$

et puisque $t \leq T_r < \underline{t}$, alors $\nu_t \geq 0$.

c.) Sur l'intervalle $[T_r, \underline{t})$, il faut déterminer des valeurs non négatives de ν_t et γ_{et} pour lesquelles (A.3.10) est vérifiée si $\lambda = \lambda^*$, et ν_t est non négatif. Le fait que la ressource renouvelable ne soit plus rare à partir de T_r suggère de choisir $\nu_t = 0$. Or considérons (A.3.10) pour $\lambda = \lambda^*$. On a :

$$\lambda = \lambda^* + \nu_t(A_r B_{rt}^{-1})(A_e^{-1}B_{et}) + \gamma_{et}A_e^{-1}B_{et},$$

d'où : $\nu_t = 0$ et $\gamma_{et} = 0$, et si $\nu_t = 0$, alors d'après (A.3.9) :

$$\omega_t A_r e^{-\rho t} > 0.$$

d.) Sur l'intervalle $[\underline{t}, +\infty)$, il faut déterminer des valeurs non négatives de ν_t et γ_{rt} pour lesquelles (A.3.13) est vérifiée si $\lambda = \lambda^*$ et il faut s'assurer que ν_t donné par (A.3.12) pour $\lambda = \lambda^*$ est non négatif.
Pour la même raison qu'au point précédent posons $\nu_t = 0$.

Afin que (A.3.13) soit satisfaite, il faut que :

$$\gamma_{rt} = A_e B_{et}^{-1} B_{e0} e^{(b_e - \rho)(\underline{t} - \hat{h})} [e^{t - \underline{t}} - 1],$$

et puisque $t \geq \underline{t}$, alors $\gamma_{rt} \geq 0$.

Si $\lambda = \lambda^*$, on a d'après (A.3.12) :

$$\omega_t = A_e e^{-\rho t} - \lambda^* A_e B_{et}^{-1} = A_e e^{-\rho t} [1 - e^{(b_e - \rho)(\underline{t} - \hat{h})}],$$

et puisque $t \geq \underline{t}$, alors $\omega_t \geq 0$.

REFERENCES

Amigues J. P., Grimaud A. et M. Moreaux, (2004), Dedicated R&D Effort and Exhaustible Resource. *LERNA D. P.,* Université de Toulouse I.

Amigues, J. P., N. V. Long et M. Moreaux (2003), Overcoming the Natural Resource Constraint through Dedicated R&D Efforts : Contrasting the Non Renewable and the Renewable Resource Economies, à paraître dans *International Journal of Sustainable Development.*

Amigues, J.P., et M. Moreaux (2001), On the Equilibrium Order of Exploitation of the Natural Resources, *LEERNA D.P. 02.09.084* Université de Toulouse 1.

Boyle, C (1993), *Renewable Energy*, Oxford : Oxford University Press.

Dasgupta, P.S. et G.M. Heal (1974), The Optimal Depletion of Exhaustible Resources, *Review of Economic Studies, Symposium on the Economics of Exhaustible Resources, 3-28.*

Ford, H. (1924), *Ma vie et mon oeuvre*, Payot : Paris.

Gaudet, G., M. Moreaux et S. Salant (2001), Intertemporal depletion of Resource Sites by Spatially-distributed Users, *American Economic Review, Vol 91 n4, 1149-1159.*

Habakukk, H.T. (1962), *American and British Technology in the Nineteenth Century*, Cambridge : Cambridge University Press.

Hoke, D.R., (1990), *Ingenious Yankees : The Rise of the American System of Manufactures in the Private Sector*, New York : Columbia University Press.

Hounshell, D.A. (1984), *From the American System to Mass Production 1800-1932 : The Development of Manufacturing Technology in the United States*, Baltimore : Johns Hopkins University Press.

Howes, R and A. Fainberg, eds, (1993), *The Energy Source Book : A Guide to Technology, Resources and Policy*, New York : American Institute of Physics.

Johanssan, T.B., H. Kelly, A.K.N. Reddy and R. Williams, eds, (1993), *Renewable Energy : Sources for Fuels and Electricity*, Londres : Earthcan Publications et Washington.D.C : Island Press.

Mayr, O. et R.C. Post, eds, (1981), *Yankee Enterprise : The Rise of the American System of Manufactures*, Washington.D.C : Smithsonian Institution Press.

Rosenberg, N. (1978), *Technology and American Economic Growth*, White Plains.N.Y : M.E.Sharpe.

Strassmann, W.P. (1959), *Risk and Technology Innovation : American Manufacturing Methods during the Nineteenth Century*, Ithaca : Cornell University Press.

Tahvonen, O. et S. Salo(2001), Economic Growth and Transitions between Renewable and Nonrenouvelable Resources, *European Economic Review, Vol 45 n8, A379-1398.*

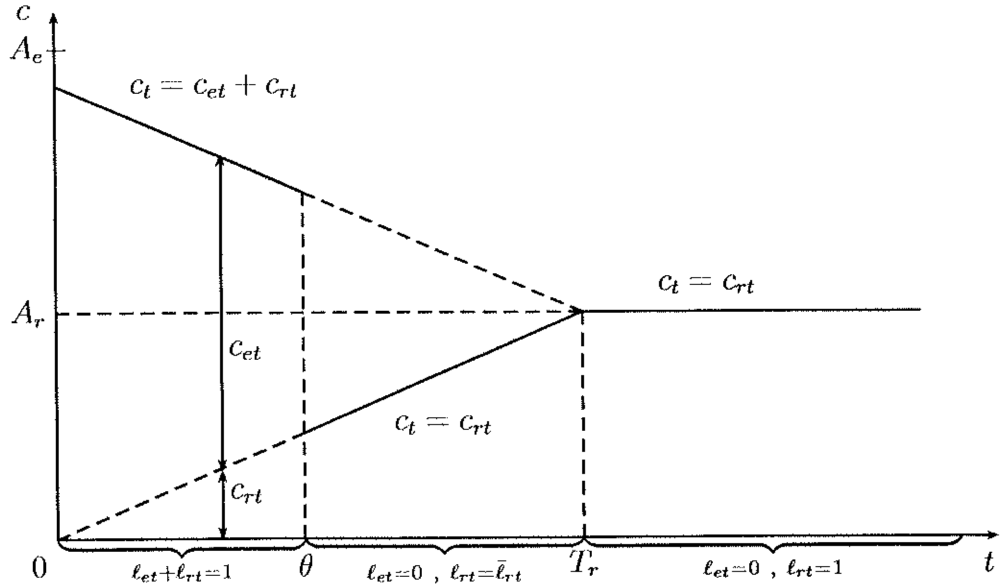

Figure 1 - Sentier optimal de consommation en présence d'un substitut renouvelable plus coûteux en travail, initialement rare.
Cas : $\bar{h} > T_r$, $\rho > b_e$ et $S_0 < S_0^1$.

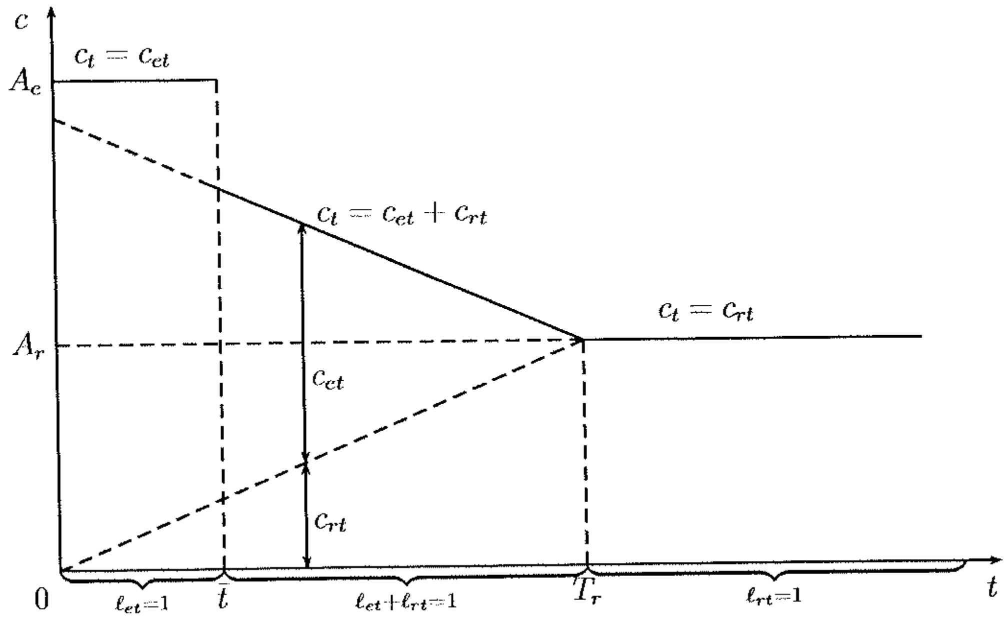

Figure 2 - Sentier optimal de consommation en présence d'un substitut renouvelable plus coûteux en travail, initialement rare.
Cas : $\bar{h} > T_r$, $\rho > b_e$ et $S_0^2 > S_0 > S_0^1$.

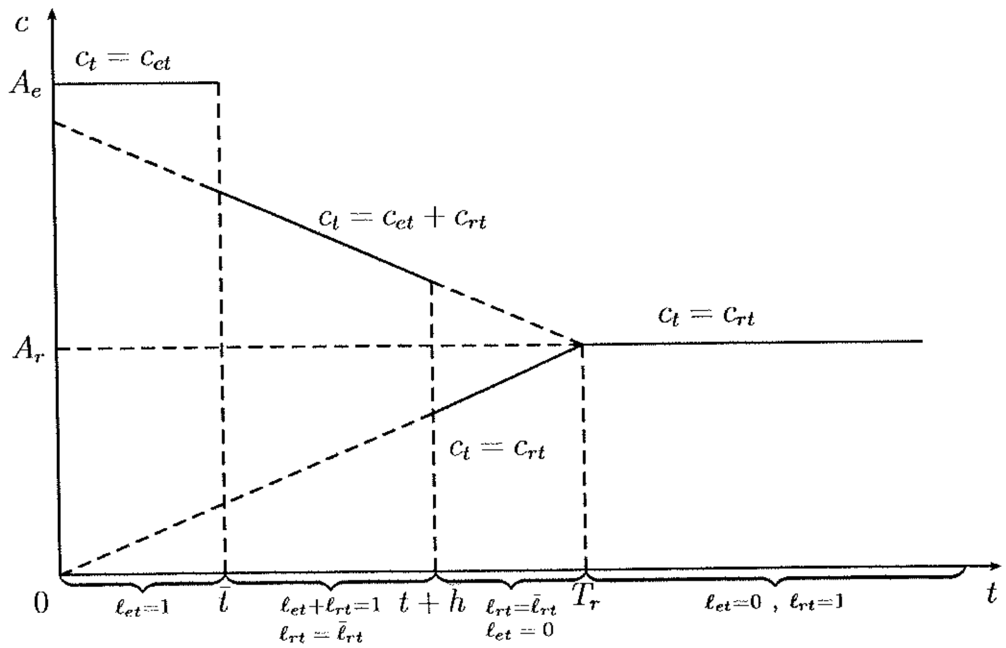

Figure 3 - Sentier optimal de consommation en présence d'un substitut renouvelable plus coûteux en travail, initialement rare.
Cas : $\bar{h} < T_r$, $\rho > b_e$ et $S_0^b > S_0 > S_0^2$.

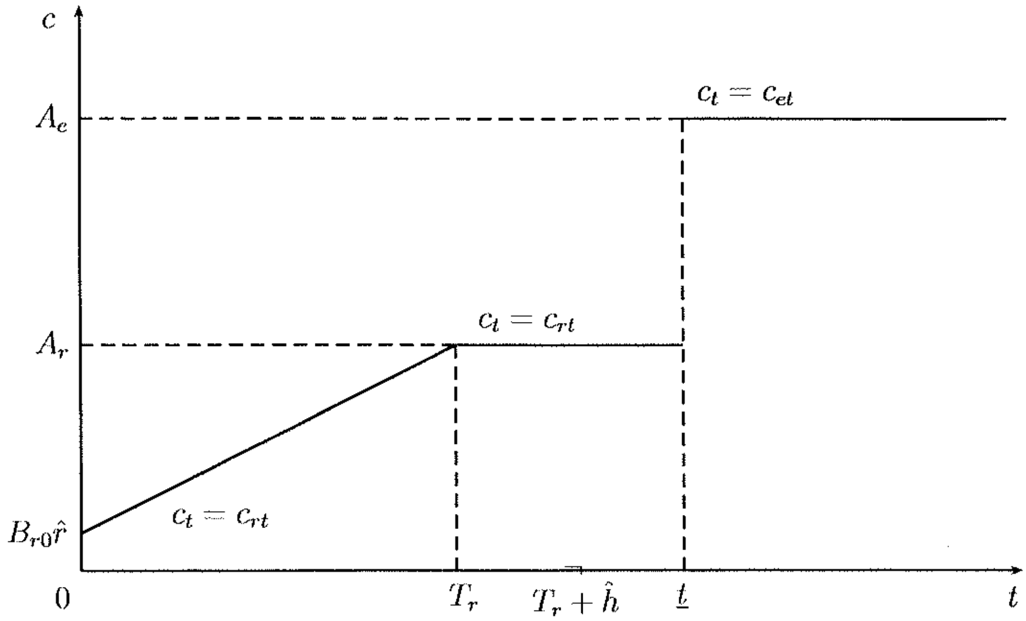

Figure 4 - Sentier optimal de consommation en présence d'un substitut renouvelable plus coûteux en travail, initialement rare.
Cas : $\rho < b_e, \hat{h} > T_r$ et $S_0 < S_0'$.

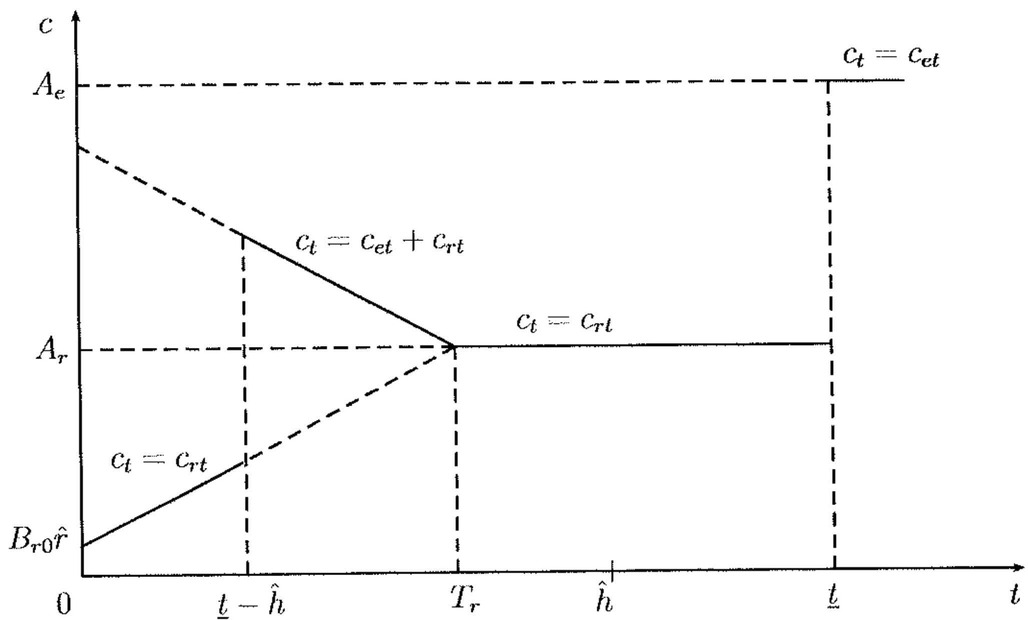

Figure 5 - Sentier optimal de consommation en présence d'un substitut renouvelable plus coûteux en travail, initialement rare.
Cas : $\rho < b_e, \hat{h} > T_r$ et $S_0'' > S_0 > S_0'$.

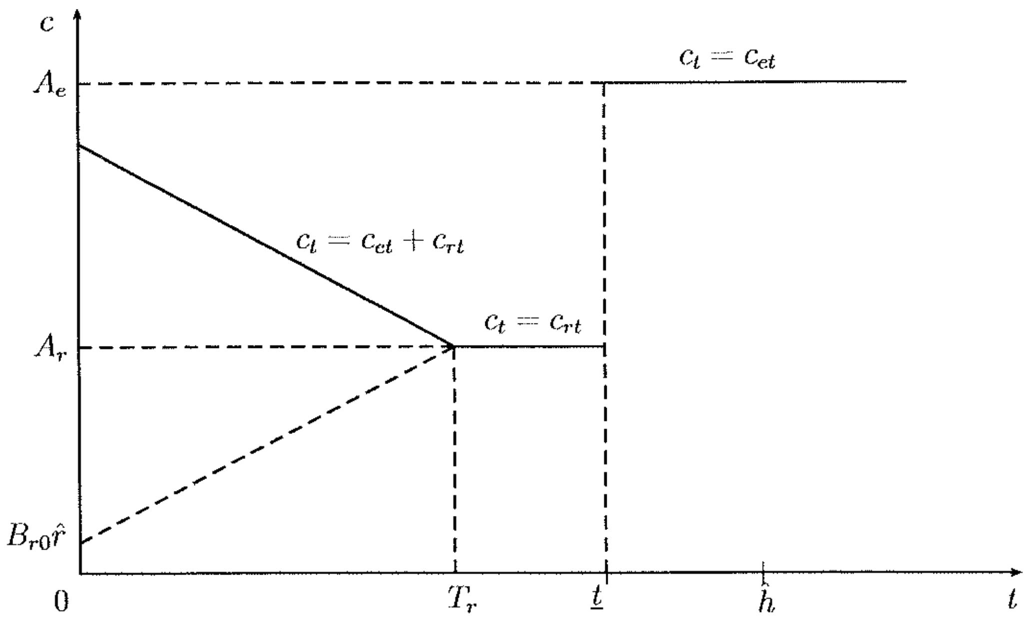

Figure 6 - Sentier optimal de consommation en présence d'un substitut renouvelable plus coûteux en travail, initialement rare.
Cas : $\rho < b_e, \hat{h} > T_r$ et $S_0''' > S_0 > S''_0$.

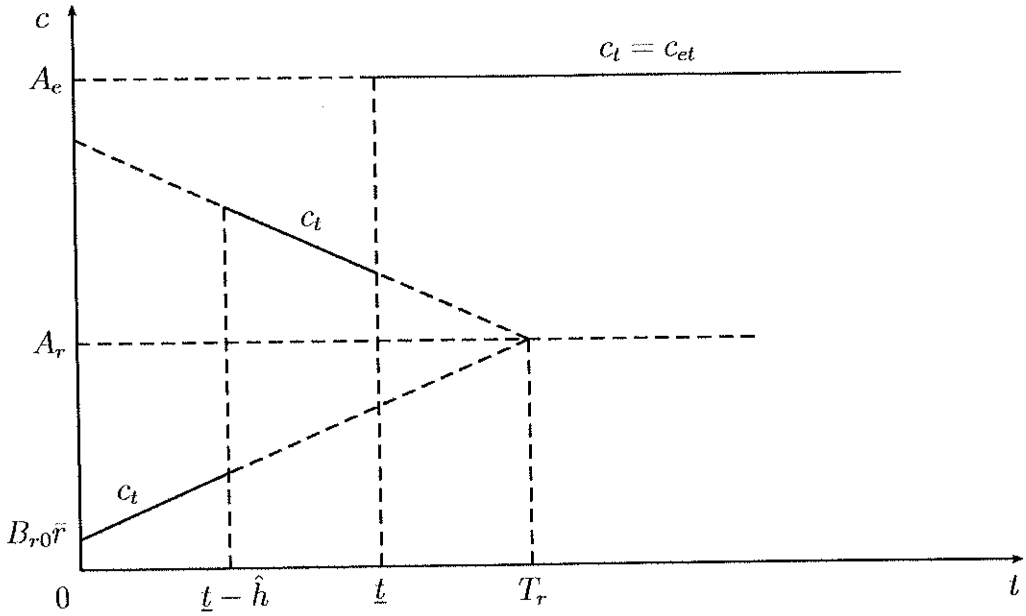

Figure 7 - Sentier optimal de consommation en présence d'un substitut renouvelable plus coûteux en travail, initialement rare.
Cas : $\rho < b_e, \hat{h} > T_r$ et $S_0^{\beta} > S_0 > S_0^{\gamma}$.